

Камчатский государственный технический университет

Кафедра высшей математики

**Г.П. Исаев**

## **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

*Рекомендовано*

*Дальневосточным региональным учебно-методическим центром  
(ДВ РУМЦ) в качестве учебного пособия для студентов специальности  
201300 «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования»  
вузов региона*

Петропавловск-Камчатский  
2006

УДК 621.396  
ББК 32.842-5

И85

Рецензенты:

*Г.И. Дружин,*  
кандидат физико-математических наук,  
главный инженер ИКИР ДВО РАН

*А.Н. Шулюпин,*  
доктор технических наук,  
ведущий научный сотрудник ИВ и С ДВО РАН

**Исаев Г.П.**

И85      Электродинамика: Учебное пособие. – Петропав-  
ловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2006. – 150 с

**ISBN**

Учебное пособие составлено в соответствии с требова-  
ниями к обязательному минимуму содержания дисциплины  
«Основы электродинамики и распространения радиоволн» и  
«Антенны и устройства СВЧ», входящих в основную обра-  
зовательную программу подготовки специалистов по специ-  
альности 201300 «Техническая эксплуатация транспортного  
радиооборудования» государственного образовательного  
стандарта высшего профессионального образования.

УДК 621.396  
ББК 32.842-5

© КамчатГТУ, 2006  
© Исаев Г.П., 2006

## Введение

В современной радиоэлектронике широко используются различные волновые электромагнитные процессы в виде направленных электромагнитных волн в разнообразных линиях передачи.

Для осуществления данной цели с одной стороны необходимо рассматривать процессы излучения и приема радиоволн, а с другой стороны необходимо рассматривать процесс распространения радиоволн в пространстве между передающей и приемной антеннами. Данные вопросы можно рассмотреть только на основе законов электродинамики.

Дело в том, что в первых опытах по радиосвязи длина электромагнитной волны составляла порядка метров. Когда радиосвязь нашла широкое применение, длина волны составляла уже порядка километров (длинные волны). Очевидно, что для длинных волн линейные размеры радиоаппаратуры и ее элементов много меньше длины радиоволны, поэтому принцип работы радиоаппаратуры хорошо описывается теорией цепей.

Основным элементом радиоприемного и радиопередающего оборудования с точки зрения теории цепей является колебательный контур, содержащий цепочку  $R$ ,  $L$ , и  $C$ , который в простейшем виде может быть представлен на рис. 1 в следующем виде

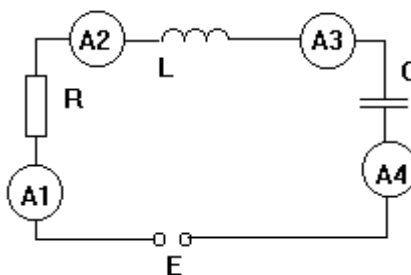


Рис. 1

Основным положением теории цепей является тот факт, что если в различные участки цепи колебательного контура

(рис. 1.) поместить несколько амперметров, то они будут показывать одинаковые значения тока

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \text{const.} \quad (1)$$

Соотношение (1) следует из выражения для установившегося режима колебательного процесса тока

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

где величина  $I_0$  представляет из себя понятие амплитуды колебаний тока, величина  $\omega$  называется частотой колебаний, величина  $t$  характеризует момент рассматриваемый момент времени, величина  $\varphi_0$  называется начальной фазой колебаний.

Из выражения (2) следует, что значение фазы колебаний

$$\Phi(t) = \omega t + \varphi_0 \quad (3)$$

в случае малых частот для различных участков колебательного контура будет практически одно и то же.

С другой стороны в таких направлениях радиотехники, как космическая радиоэлектроника, радиолокация, радионавигация, радиорелейная и многоканальная связь используются радиоволны дециметрового, сантиметрового и более короткого диапазона. В данном случае обычная теория цепей уже не работает, так как линейные размеры элементов радиоаппаратуры будут порядка или больше длины волны и рассматриваемые амперметры на рис. 1, будут показывать различные значения тока, так как фаза колебаний тока (3) за счет величины  $\omega t$  при больших частотах приводит к тому, что, например один амперметр будет показывать +5А, другой 0А, третий –5А и т. д. Поэтому в диапазоне СВЧ нельзя использовать генератор электромагнитных колебаний в виде колебательного контура. В данном случае используются электродинамические структуры в виде резонатора и волновода, которые могут иметь различные внутренние заполнения в виде диэлектриков и магнитодиэлектриков.

Из сказанного следует, что важной составной частью подготовки радиоинженеров является необходимость изучения

техники СВЧ. Успешное изучение принципа работы волноводов и резонаторов возможно на основе усвоения основных законов электродинамики СВЧ.

Данное учебное пособие и посвящено рассмотрению основных законов электродинамики, на основе которых далее будут базироваться изучаемые курсантами специальности «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» такие дисциплины как «Основы электродинамики и распространение радиоволн» и «Антенны и устройства СВЧ».

## Глава I

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### *1. Понятие электромагнитного поля*

В дальнейшем все, что нас окружает, будем называть материей. Материя существует в двух видах: в виде вещества и в виде поля.

**Вещество** – вид материи, локализованной в ограниченной области пространства. Этот вид материи характеризуется понятием инертной массы ( $m_{ин}$ ), входящей в основной закон динамики поступательного движения

$$m_{ин} \vec{a} = \vec{F}. \quad (1.1)$$

В дальнейшем о веществе будем говорить в смысле понятия заряженной частицы (электрон, протон, нейтрон), которая характеризуется понятием электрического заряда.

Экспериментально установлено, что заряд любой частицы является дискретной величиной. Данный факт можно записать в виде закона квантования заряда

$$|q_{\text{част.}}| = N \cdot e, \quad (1.2)$$

где  $N$  – кратность заряда,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – элементарный заряд.

Экспериментально установлено, что в природе существует два вида электричества: положительный и отрицательный. Исторически принято считать, что с электроном связан отрицательный вид электричества, а с протоном связан положительный вид электричества. В дальнейшем будем использовать следующие величины зарядов для элементарных частиц

$$\begin{cases} q_{\text{электрона}} = -e, \\ q_{\text{протона}} = +e, \\ q_{\text{нейтрона}} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Из выражения (1.3) следует, что в дальнейшем нейтрон будем рассматривать как элементарную частицу, не имеющую электрического заряда.

**Поле** – вид материи, не локализованный в ограниченной области пространства. Этот вид материи не характеризуется понятием инертной массы. Кроме того, этот вид материи имеет бесконечно большое число степеней свободы.

В курсе общей физики изучаются три вида полей: гравитационное, электромагнитное и поле ядерных сил. Электромагнитное поле представляет из себя особый вид материи, который обуславливает процесс взаимодействия электрических зарядов. Наука, которая занимается изучением свойств электромагнитного поля, называется **электродинамикой**.

Всю совокупность электромагнитных явлений принято разделять на две группы: электрические и магнитные явления. В соответствии с этим выделяют две частные разновидности электромагнитного поля: электрическое и магнитное поля. Эти поля, находясь во внутреннем единстве и образуют единое электромагнитное поле.

Так как взаимодействие электромагнитного поля с заряженными частицами осуществляется посредством векторной величины, называемой вектором силы  $\vec{F}$ , то в дальнейшем

будем ее определять на основе основного закона динамики поступательного движения (1.1), записываемого в дифференциальной форме в следующем виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1.3)$$

Согласно (1.3) в дальнейшем вектор силы  $\vec{F}$  будем понимать как физическую величину, характеризующую быстроту изменения импульса частицы  $\vec{p}$ .

## 2. Электрическое поле и его основные характеристики

**Электрическим полем** называется вид материального поля, которое воздействует как на неподвижные, так и на подвижные электрические заряды.

Основной силовой характеристикой электрического поля является вектор напряженности  $\vec{E}$ , который определяется следующей формулой

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \quad (2.1)$$

Выражение (2.1) представляет из себя математическую модель электрического поля. Изобразим математическую модель электрического поля с помощью следующего рисунка

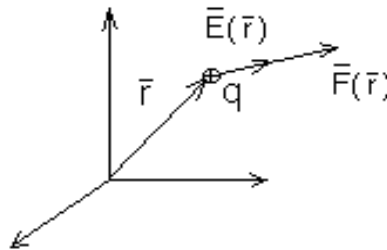


Рис. 2.1

Согласно выражения (2.1) заключаем, что на положительные заряды со стороны электрического поля действует сила, направленная по направлению вектора напряженности электрического поля

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.2)$$

При распространение радиоволн в вакууме или в воздухе достаточно вводить в рассмотрение силовую характеристику в виде вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$ .

При распространении радиоволн в среде необходимо вводить в рассмотрение дополнительную силовую характеристику электрического поля, которая называется вектором электрической индукции (электрического смещения)  $\vec{D}(\vec{r})$ . Таким образом, для случая вакуума или воздуха связь между векторами напряженности электрического поля и электрического смещения можно записать в виде

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}), \quad (2.3)$$

где  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная, которая физического смысла не имеет, а является коэффициентом перевода электрических величин из одной системы единиц измерения в другую.

Например, в системе Гаусса (электрической) величина  $\epsilon_0 = 1$ , поэтому выражение (2.3) принимает вид

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}).$$

Для того чтобы установить факт существования в данной точке пространства электрического поля, необходимо в эту точку поместить электрический заряд, если на него при этом будет действовать сила, то в данной точке пространства существует электрическое поле.



### 3. Однородные и неоднородные электрические поля

**Силовой электрической линией** называется воображаемая линия, проведенная в пространстве, в котором создано электрическое поле, и касательная в каждой точке, к которой совпадает с вектором напряженности (рис. 3.1).

С помощью электрических силовых линий удобно изображать графически электрические поля. Для того, чтобы на практике различать электрические поля по степени эффективности на основе силовых линий вводится также понятие густоты силовых линий.

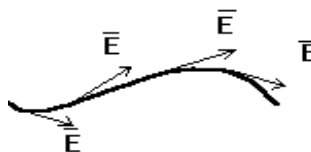


Рис. 3.1

**Густотой силовых линий** называется величина, определяющая число силовых линий, проходящих через единичную площадку, ориентированную в направлении, перпендикулярном направлению вектора  $\vec{E}$  и которая численно, равна модулю вектора  $\vec{E}$

$$G_E = \left| \vec{E} \right|. \quad (3.1)$$

Выражение (3.1) представляет собой определение понятия густоты силовых линий. Рассмотрим отдельно случай однородного и неоднородного электрических полей.

**Однородные электрические поля.** Однородными электрическими полями называются электрические поля, вектор напряженности  $\vec{E}$  которых в различных точках пространства одинаков по модулю и по направлению

$$\vec{E}(\vec{r}) = \text{const}. \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) представляет из себя математическую модель однородного электрического поля. Изобразим графически понятие однородного электрического поля, учитывая понятие густоты силовых линий электрического поля.

На практике под понятием однородного электрического поля понимается электростатическое поле, создаваемое между обкладками конденсатора вдали от краев обкладок.

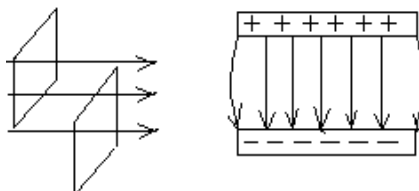


Рис. 3.2

**Неоднородные электрические поля.** Неодно-

родными электрическими полями называются электрические поля, вектор напряженности  $\vec{E}$  которых в различных точках пространства различен как по модулю, так и по направлению.

$$\vec{E}(\vec{r}) \neq \text{const}. \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) представляет собой математическую модель неоднородного электрического поля. Изобразим графически понятие неоднородного электрического поля.

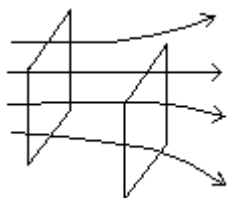


Рис. 3.3

Примером неоднородных электрических полей может служить электростатическое поле, создаваемое системой диполей. В основном на практике встречаются неоднородные электрические поля. Понятием однородного электрического поля пользуются в случае упрощения различных расчетов, связанных с реальными электрическими полями.

#### 4. Магнитное поле и его основные характеристики

**Магнитным полем** называется особый вид поля (материи), посредством которого осуществляется взаимодействие движущихся электрических зарядов или воздействие на движущиеся электрические заряды. В курсе общей физики рассматриваются три вида магнитных эффектов.

### Взаимодействие проводников с током.

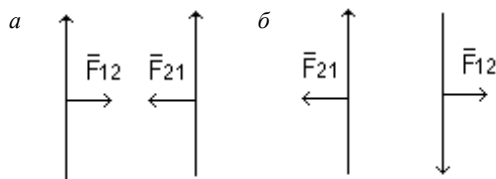


Рис. 4.1а

### Воздействие проводника с током на магнитную стрелку.

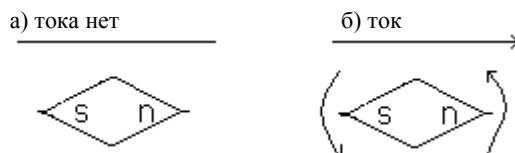


Рис. 4.1б

В первом случае происходит взаимодействие движущихся зарядов, во втором случае движущиеся заряды воздействуют на постоянный магнит, в третьем случае постоянный магнит воздействует на движущиеся электрические заряды. Во всех трех случаях взаимодействие осуществляется посредством магнитного поля.

Так как из рисунков видно, что это взаимодействие обладает векторным характером (притяжение или отталкивание проводников, вращение магнитной стрелки в разные стороны), то заключаем, что, во-первых, магнитное поле способно оказывать силовое воздействие, во-вторых, это силовое воздействие обладает векторным характером, поэтому для характеристики силового воздействия векторного поля вводится величина вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , который является основной силовой характеристикой магнитного поля.

### Воздействие постоянного магнита на проводник с током.

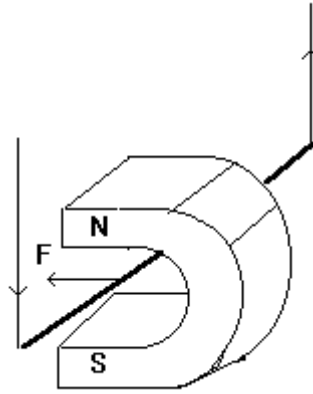


Рис. 4.16

Экспериментально установлено, что сила, действующая на заряд со стороны магнитного поля равна

$$\vec{F}_{\text{ЛВ}} = q \left[ \vec{v} \vec{B} \right]. \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) называется магнитной составляющей силы Лоренца. В этом выражении величина  $q$  – алгебраическая величина заряда,  $\vec{v}$  – вектор мгновенной скорости заряженной частицы.

Найдем модуль от левой и правой частей выражения (4.1)

$$\left| \vec{F}_{\text{ЛВ}} \right| = \left| q \left[ \vec{v} \vec{B} \right] \right| = |q| \left| \left[ \vec{v} \vec{B} \right] \right| = |q| v B \sin \left( \vec{v} \wedge \vec{B} \right). \quad (4.2)$$

Пусть угол  $\angle \alpha = \left( \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = 90^\circ$ , тогда из (4.2) получаем следующее выражение для модуля вектора магнитной индукции

$$B = \frac{F_{\text{ЛВ}}}{|q| v}. \quad (4.3)$$

Согласно выражения (4.3) можно определить физический смысл основной силовой характеристики магнитного поля. А именно, вектор индукции магнитного поля является силовой характеристикой магнитного поля и характеризует величину силы, действующей на единичный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью.

В курсе физики физический смысл вектора  $\vec{B}$  определяется по воздействию магнитного поля на проводник с током единичной длины, по которому протекает ток, единичной величины. Данный факт записывается на основе закона Ампера в следующем виде

$$B = \frac{1}{I} \cdot \frac{dF_A}{dl} . \quad (4.4)$$

В случае если электромагнитная волна распространяется в вакууме или воздухе, то для описания ее распространения достаточно вектора  $\vec{B}$ , если электромагнитная волна распространяется в среде (в волноводе, заполненном коаксиальными магнетиками), то необходимо вводить дополнительную силовую характеристику  $\vec{H}$  (вектор напряженности магнитного поля) и которая с вектором  $\vec{B}$  в случае вакуума связана формулой

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (4.5)$$

где величина  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  называется магнитной постоянной, которая физического смысла не имеет, а является коэффициентом перевода магнитных величин из одной системы единиц измерения в другую.

Под понятием силы Лоренца в физике понимается следующая величина

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\left[\vec{v} \vec{B}\right]. \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) не выводится, а является следствием экспериментально наблюдаемых фактов.

При этом в выражении (4.6) слагаемое  $q \vec{E}$  понимается в виде электрической составляющей силы Лоренца, а величина  $q \left[ \vec{v} \vec{B} \right]$  понимается в виде магнитной составляющей силы Лоренца.

## 5. Однородные и неоднородные магнитные поля

**Магнитной силовой линией** называется воображаемая линия, проведенная в пространстве, в котором создано магнитное поле, касательная, к каждой точке которой совпадает по направлению с вектором магнитной индукции  $\vec{B}$  (рис. 5.1).

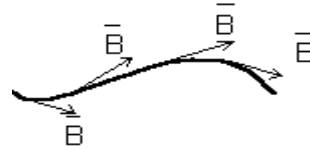


Рис. 5.1

Данное физическое понятие применяется на практике для графического изображения магнитных полей. Однако для графического изображения магнитных полей на практике задания только силовых линий недостаточно. Для характеристики степени интенсивности магнитного поля по картине силовых линий необходимо дополнительно вводить понятие густоты силовых магнитных линий.

**Густотой силовых линий** называется величина, которая показывает число силовых линий, пронизывающих единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению вектора  $\vec{B}$  и численно равной модулю вектора магнитной индукции  $\vec{B}$

$$G_B = \left| \vec{B} \right|. \quad (5.1)$$

Рассмотрим на основе введенного в рассмотрение понятия силовой магнитной линии два вида магнитных полей: од-

нородного и неоднородного.

**1).Однородные магнитные поля.** Однородным магнитным полем называется поле, которое характеризуется тем фактом, что вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  в различных точках пространства одинаков по модулю и по направлению

$$\vec{B} = \text{const.} \quad (5.1)$$

Выражение (5.1) представляет из себя математическую модель однородного магнитного поля. На рис.1.7. приведено графическое изображение однородного магнитного поля. На практике моделью однородного магнитного поля пользуются при рассмотрении магнитного поля между полюсами постоянного подковообразного магнита вдали от их краев.

**2).Неоднородные магнитные поля.** Неоднородным магнитным полем называется магнитное поле, у которого либо модуль вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , либо его направление, либо и то и другое являются неодинаковыми в различных точках пространства

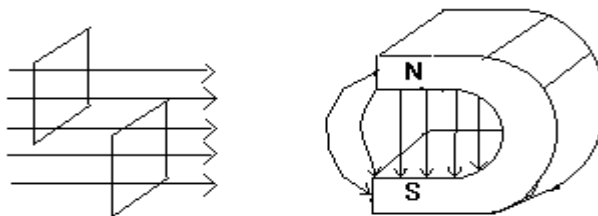


Рис.1. 7

$$\vec{B} \neq \text{const.} \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) представляет из себя математическую модель неоднородного магнитного поля. На рис.1.8. приведено графическое изображение неоднородного магнитного поля. Следует иметь в виду, что все магнитные поля, встречающиеся на практике являются неоднородными, а моделью однородного магнитного поля на практике пользуются для

упрощения численных расчетов.

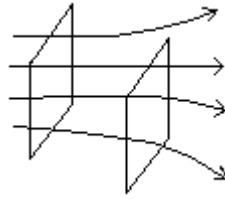


Рис.1.8

Силовые линии магнитного поля или являются замкнутыми, или приходят из бесконечности и уходят на бесконечность (этот факт изображен на рис.1.9 для магнитного поля прямолинейного проводника с током и плоского постоянного магнита соответственно).

### 6. Поток вектора силового поля.

Рассмотрим произвольное силовое поле. Основной характеристикой силового поля будет являться силовая характеристика, которую будем изображать вектором  $\vec{A}$ . Введем для рассматриваемого силового поля понятие силовой линии.

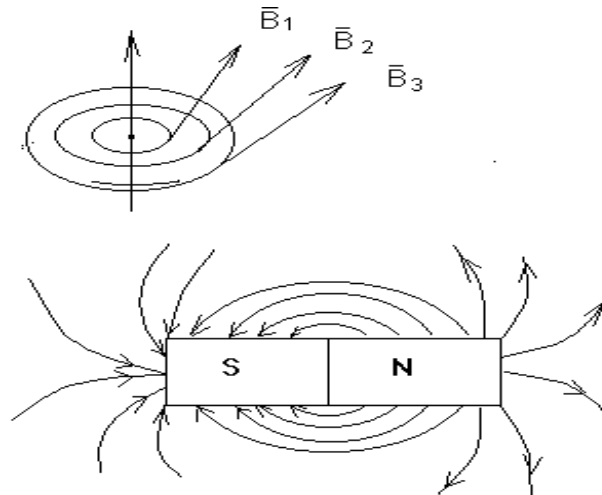




Рис. 1.9

Проведем в пространстве, в котором действует силовое поле поверхность  $S$ , которая будет стягиваться контуром  $L$ , выберем на этой поверхности элементарную площадку площадью  $ds$  и восстановим к этой площадке перпендикуляр, вдоль которого проведем вектор внешней нормали  $\vec{n}$  (этот факт изображен на рис. 1.10).



Рис. 1.10

Рассмотрим картину пересечения элементарной площадки силовой линией более подробно с помощью рис.1.11.

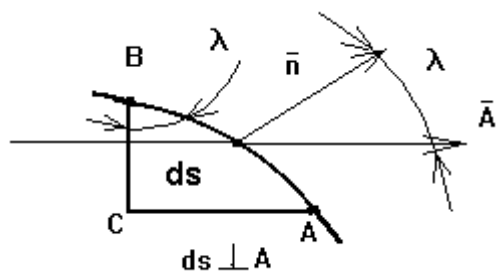


Рис. 1.11

Введем в рассмотрение понятие псевдовектора  $\vec{ds}$ , рассматриваемого в качестве произведения площади элементар-

ной площадки  $d\vec{s}$  на единичный вектор нормали  $\vec{n}$

$$d\vec{s} = ds \vec{n}. \quad (6.1)$$

Также введем в рассмотрение следующую величину

$$d\Phi_A = G_A ds_{\perp}. \quad (6.2)$$

Выражение (6.2) представляет из себя понятие элементарного потока векторного поля  $\vec{A}$ , физический смысл, которого заключается в том, что он характеризует число силовых линий, пронизывающих элементарную площадку  $ds$  и который равен произведению густоты силовых линий векторного поля на площадь элементарной площадки, пронизываемой силовыми линиями, расположенной перпендикулярно к направлению силовых линий.

Ранее мы отметили, что под понятием густоты силовых линий подразумевается величина, равная модулю силового вектора  $\vec{A}$

$$G_A = \left| \vec{A} \right| = A. \quad (6.3)$$

Из криволинейного треугольника  $ABC$ , приведенного на рисунке рис.1.11, получаем

$$ds_{\perp} = ds \cos \alpha = ds \cdot \cos \left( \vec{A} \wedge \vec{n} \right) = ds \cdot \cos \left( \vec{A} \wedge d\vec{s} \right). \quad (6.4)$$

Ранее мы определили понятие элементарного потока силового поля следующим образом

$$d\Phi_A = G_A ds_{\perp} = A ds \cos \left( \vec{A} \wedge d\vec{s} \right) = \left( \vec{A} d\vec{s} \right). \quad (6.5)$$

Итак, для элементарного потока силового поля можно записать

$$d\Phi_A = \left( \vec{A} \, d\vec{s} \right). \quad (6.6)$$

Интегрируя по всей поверхности  $S$  левую и правую части выражения (6.6), получаем

$$\int_S d\Phi_A = \int_S \left( \vec{A} \, d\vec{s} \right). \quad (6.7)$$

Введем в рассмотрение понятие величины полного потока силового вектора  $\vec{A}$ , определяемого выражением

$$\Phi_A = \int_S d\Phi_A. \quad (6.8)$$

С учетом выражения (6.8) соотношение (6.7) принимает вид

$$\Phi_A = \int_S \left( \vec{A} \, d\vec{s} \right). \quad (6.9)$$

Пусть поверхность  $S$  является замкнутой, тогда формулу (6.9) можно записать в виде

$$\Phi_A = \oint_S \left( \vec{A} \, d\vec{s} \right). \quad (6.10)$$

Выражение (6.10) необходимо понимать в качестве потока силового вектора  $\vec{A}$  через замкнутую поверхность.

В дальнейшем, во-первых, под понятием потока силового поля будем подразумевать число силовых линий, пронизывающих поверхность  $S$ . Во-вторых, если поверхность  $S$  не является замкнутой, то ее будем связывать с понятием замкнутого контура  $L$ , которым она стягивается.

## 7. Теорема Остроградского-Гаусса.

Рассмотрим произвольное силовое поле, силовой вектор которого является функцией от пространственных и времен-

ной координат и описывается вектором  $\vec{A}$  в виде

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t)$$

В курсе высшей математики для случая функции одной переменной  $A(x)$ , вводится понятие обыкновенной производной, которая определяется через понятие предела отношения приращения функции к приращению аргумента, стремящегося к нулю

$$A'(x) = \frac{dA(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x}. \quad (7.1)$$

В случае если функция является функцией трех пространственных переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то необходимо рассматривать понятия частных производных по каждой из переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Например, частные производные по переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$  для функции

$$A = A(x, y, z)$$

определяются следующими выражениями через понятие пределов отношения приращения функции по одной переменной к величине приращения этой переменной, стремящейся к нулю. При этом необходимо иметь в виду, что другие две переменные при этом считаются постоянными параметрами

$$A'_x = A'_x(x, y, z) = \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \Big|_{y = \text{const}} \Big|_{z = \text{const}}, \quad (7.2)$$

$$A'_y = A'_y(x, y, z) = \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta y} \Big|_{x = \text{const}} \Big|_{z = \text{const}},$$

$$A'_z = A'_z(x, y, z) = \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta z} \Big|_{x = \text{const}} \Big|_{y = \text{const}}.$$

Составим на основе выражений (7.2) следующий дифференциальный оператор

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}. \quad (7.3)$$

Дифференциальный оператор, определяемый соотношением (7.3) в виде суммы частных производных по трем пространственным координатам называется дивергенцией вектора  $\vec{A}$ . Этот дифференциальный оператор находит широкое применение в различных отраслях науки. В курсе высшей математики в разделе "Теория поля" понятие дивергенции строго определяется следующим образом

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S (\vec{A} d\vec{s})}{V}. \quad (7.4)$$

Выражение (7.4) представляет из себя как физическую, так и математическую формулировку понятия дивергенции векторной величины  $\vec{A}$ .

В курсе физики понятие дивергенции векторного поля  $\vec{A}$  понимается в виде числа силовых линий, пронизывающих поверхность  $S$ . Определение понятия дивергенции на основе выражения (7.4) означает, что объем рассматриваемого пространства, стягивается в точку, поэтому очень часто, говоря о понятии дивергенции векторного поля  $\vec{A}$ , в физике говорят о расхождении вектора  $\vec{A}$  в точке.

В курсе высшей математики дифференциальный оператор  $\operatorname{div} \vec{A}$  определяется с помощью следующего выражения

$$\oint_S (\vec{A} d\vec{s}) = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dv. \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) называется формулой или теоремой Остроградского-Гаусса.

### 8. Теорема о потоке вектора напряженности электрического поля в интегральной форме.

В курсе общей физики для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  вводится следующая формула

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (8.1)$$

Выражение (8.1) называется теоремой о потоке вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , и которая формулируется следующим образом

Поток вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен отношению алгебраической суммы электрических зарядов, заключенных внутри поверхности  $S$ , к величине электрической постоянной  $\epsilon_0$ .

Следует иметь в виду, что выражение (8.1) может быть строго получено только для частных случаев. В общем случае данное выражение не выводится, а формулируется в виде теоремы, доказательством которой является наличие экспериментально наблюдаемых фактов, следующих из этой теоремы. Физический смысл этой теоремы необходимо понимать как обобщенный закон Кулона.

Введем в рассмотрение понятие объемной плотности пространственного заряда  $\rho$ , определяемого в виде отношения элементарной величины заряда  $dq$  к величине элементарного объема,  $dV$ , в котором этот заряд сосредоточен

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (8.2)$$

Разделим переменные в выражении (8.2) и проинтегрируем полученное выражение по всему объему  $V$

$$\int_V dq = \int_V \rho dV. \quad (8.3)$$

Введем в рассмотрение понятие суммарного заряда, за-

ключенного в объеме  $V$

$$\int_V dq = q. \quad (8.4)$$

С учетом выражения (8.4) соотношение (8.3) принимает вид

$$q = \int_V \rho dV. \quad (8.5)$$

Подставляя выражение (8.5) в соотношение (8.1), окончательно получим следующее выражение

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (8.6)$$

Выражение (8.6) в электродинамике понимается в качестве теоремы о потоке вектора напряженности электрического поля в интегральной форме.

### 9. Теорема о потоке вектора напряженности электрического поля в дифференциальной форме.

Рассмотрим выражение для теоремы о потоке вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , полученное в предыдущем параграфе в интегральном виде

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (9.1)$$

Запишем теорему Остроградского-Гаусса для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV. \quad (9.2)$$

Приравняв правые части выражений (9.1) и (9.2), после чего получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (9.3)$$

Два интеграла по одному и тому же объему равны тогда и тогда, когда равны их подинтегральные функции, таким образом можно записать

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.4)$$

Выражение (9.4) в электродинамике носит название теоремы о потоке вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в дифференциальной форме.

При этом величину в левой части этого выражения необходимо понимать в виде суммы частных производных по координатам  $x$ ,  $y$  и  $z$  от соответствующих проекций вектора  $\vec{E}$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (9.5)$$

На основании всего сказанного можно сделать следующий вывод.

Соотношение (9.4) представляет из себя первое, полученное нами уравнение Максвелла в дифференциальной форме, которое используется на практике для описания электромагнитной волны в вакууме или в воздухе.

## 10. Вектор плотности тока проводимости.

В теории линейных цепей вводится в рассмотрение основная характеристика тока в виде силы тока и которая в курсе общей физики определяется, как быстрота изменения заряда, протекающего через сечение проводника. На основании сказанного можно записать следующее выражение для силы тока

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (10.1)$$

Сила тока является интегральной характеристикой тока и



ее величину показывает амперметр, включенный в электрическую цепь. В электродинамике СВЧ рассматриваются вопросы протекания электрического тока через многослойные коаксиальные структуры (длинная линия, волновод, заполненный многослойным коаксиальным диэлектриком и т.д.).

Рассмотрим многослойный проводник применительно к понятию теории цепей. Пусть рассматривается  $i$ -тый слой проводника, длиной  $\ell$ , площадью поперечного сечения  $S_i$  и удельной электрической проводимостью  $\rho_i$ . В школьном курсе физики записывается следующая формула для электрического сопротивления  $i$ -того коаксиального участка проводника.

$$R_i = \rho_i \frac{\ell}{S_i}. \quad (10.2)$$

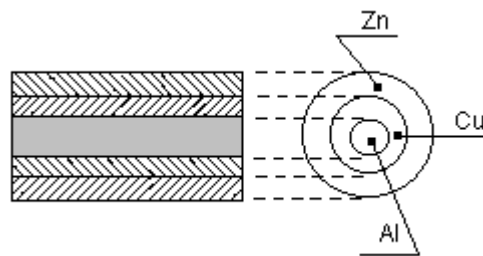


Рис. 1.12

Запишем закон Ома для однородного участка электрической цепи, между крайними точками которого приложена разность потенциалов  $\Delta \varphi$

$$I_i = \frac{\Delta \varphi}{R_i} = \frac{\Delta \varphi S_i}{\rho_i \ell}. \quad (10.3)$$

Для характеристики протекания электрического тока в различных коаксиалах, для случая неоднородной среды вводится понятие плотность тока. Плотность тока это характеристика тока, равная отношению элементарной величины тока, протекающего через элементарную площадку, к величине

площади этой площадки, определяемая следующим выражением

$$j = \frac{dI}{ds}. \quad (10.4)$$

Плотность тока является векторной характеристикой тока. Направление вектора плотности тока  $\vec{j}$  совпадает с направлением тока, то есть с направлением движения положительных зарядов.

В электродинамике под понятием вектора плотности тока подразумевается вектор, касательный к токовым линиям, т.е. к линиям, вдоль которых движутся носители тока. В курсе общей физике вводится в рассмотрение следующее выражение для вектора плотности тока

$$\vec{j} = q n \vec{v}. \quad (10.5)$$

В выражении (10.5) введены в рассмотрение следующие величины:  $q$  - величина заряда, измеряемая в кулонах (Кл),  $n$  - величина концентрации зарядов, определяющая число носителей тока в единице объема и измеряемая в величинах ( $1/\text{м}^3$ ),  $\vec{v}$  - вектор мгновенной скорости электрических зарядов и измеряемый в величинах (м/с).

Рассмотрим протекание электрического тока через элементарную площадку площадью  $ds$ , расположенную перпендикулярно направлению распространения тока. Этот факт изобразим на рис.1.13 следующим образом

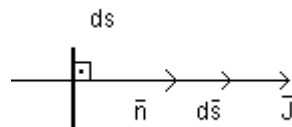


Рис. 1.13

Исходя из выражения (10.4) можно записать, разделяя переменные

$$dI = j ds. \quad (10.6)$$

Преобразуем выражение (10.6) следующим образом

$$dI = j ds = j ds \cos \theta^0 = \left| \vec{j} \right| \left| d\vec{s} \right| \cos \left( \vec{j} \wedge d\vec{s} \right) = \left( \vec{j} d\vec{s} \right).$$

Итак, между элементарной величиной силы  $dI$  тока через элемент поверхности  $ds$  и вектором плотности тока  $\vec{j}$  существует связь, которую можно записать в следующем виде

$$dI = \left( \vec{j} d\vec{s} \right). \quad (10.7)$$

Проинтегрируем левую и правую части выражения (10.7) по всей поверхности  $S$  поперечного сечения проводника, тогда получим

$$\int_S dI = \int_S \left( \vec{j} d\vec{s} \right). \quad (10.8)$$

Вводя в рассмотрение понятие величины силы тока, протекающего через всю площадь поверхности  $S$  в виде

$$I = \int_S dI. \quad (10.9)$$

С учетом выражения (10.9) соотношение (10.8) принимает вид

$$I = \int_S \left( \vec{j} d\vec{s} \right). \quad (10.9)$$

Выражение (10.9) представляет из себя связь интегральной и дифференциальной характеристик тока.

Для случая замкнутой поверхности  $S$  выражение (10.9) принимает следующий вид

$$I = \oint_S \left( \vec{j} \cdot d\vec{s} \right) \quad (10.10)$$

Выражение (10.10) представляет из себя связь между интегральной и дифференциальной характеристиками тока для случая замкнутой поверхности  $S$ .

### 11. Закон сохранения электрического заряда в интегральной форме.

В курсе общей физики закон сохранения электрического заряда формулируется в следующем виде.

Суммарный электрический заряд электрически изолированной системы не изменяется с течением времени при любых превращениях в системе.

На основании приведенного определения можно записать закон сохранения электрического заряда в следующем виде

$$\sum_{i=1}^N Q_i = \text{const}. \quad (11.1)$$

В выражении (11.1) введены в рассмотрение следующие величины:  $N$  - число электрических зарядов,  $Q_i$  - величина  $i$ -го электрического заряда.

Закон сохранения электрического заряда установлен экспериментально, его природа неизвестна до сих пор. Дело в том, что до сих пор непонятно почему электрические заряды рождаются и умирают парами, например, непонятно почему происходит аннигиляция электрон-позитронной пары (их взаимное уничтожение).

Продифференцируем по времени левую и правую части выражения (11.1)

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N Q_i = \frac{d}{dt} (\text{const}).$$

Меняя, операции суммирования и дифференцирования, в результате получим

$$\sum_{i=1}^N \frac{dQ_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{const}). \quad (11.2)$$

Учитывая тот факт, что производная от постоянной величины равна нулю, далее получаем

$$\sum_{i=1}^N \frac{dQ_i}{dt} = 0. \quad (11.3)$$

Учтем, что по определению быстрота изменения величины электрического заряда, протекающего через поперечного сечение проводника, есть величина, называемая силой тока

$$I_i = \frac{dQ_i}{dt}. \quad (11.4)$$

С учетом выражения (11.4) соотношение (11.3) принимает следующий вид

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (11.5)$$

Выражение (11.5) представляет из себя математическую запись первого правила Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда.

Запишем соотношение (8.5), определяющего связь между величиной электрического заряда  $q$ , сосредоточенного внутри объема  $V$  и величиной объемной плотности электрического заряда  $\rho$

$$q = \int_V \rho \, dv. \quad (11.6)$$

Продифференцируем левую и правую части выражения (11.6) по времени

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dv. \quad (11.7)$$

Поменяем операции дифференцирования по времени и интегрирования по объему в выражении (11.7). Тогда полу-

чим следующее выражение

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV. \quad (11.8)$$

Условимся за положительное направление тока выбирать направление движения зарядов из объема, т.е. в направлении внешней нормали к поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ . Тогда силу тока для случая убывания электрического заряда из объема будем определять следующим образом

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (11.9)$$

С учетом выражения (11.9) запишем соотношение (11.8) в следующем виде

$$-I = \int_V \frac{d\rho}{dt} dv. \quad (11.10)$$

Запишем связь между интегральной и дифференциальной характеристиками тока для случая замкнутой поверхности  $S$ , которая имеет следующий вид

$$I = \oint_S (\vec{j} \cdot d\vec{s}) \quad (11.11)$$

С учетом выражения (11.11) соотношение (11.10) принимает вид

$$\oint_S (\vec{j} \cdot d\vec{s}) = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV. \quad (11.12)$$

Выражение (11.12) в электродинамике носит название закона сохранения электрического заряда в интегральной форме.

## 12. Электродинамика неподвижных сред.

Рассмотрим понятие функции одной переменной

$$y = f(x).$$

В данном выражении величина  $x$  называется независимой переменной или аргументом, величина  $y$  называется зависимой переменной или функцией, величина  $f$  называется знаком функциональной зависимости.

В курсе высшей математики для функции одной переменной  $y = f(x)$  вводится понятие производной функции в виде предела отношения приращения функции к приращению аргумента, стремящегося к нулю

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (12.1)$$

Исходя из выражения (12.1) можно записать

$$dy = y'_x dx \quad (12.2)$$

Выражение (12.2) в курсе высшей математики понимается в виде дифференциала функции  $y = f(x)$ .

Рассмотрим понятие функции двух переменных

$$z = z(x, y). \quad (12.3)$$

Придадим приращение одной из переменных функции двух переменных, аналогично функции одной переменной функция также принимает приращение. Пусть приращение получает переменная  $x$  в виде величины  $\Delta x$ , тогда можно записать выражение для предела отношения приращения функции двух переменных  $\Delta z$  по переменной  $x$  к величине приращения этой переменной  $\Delta x$ , стремящейся к нулю тогда можно записать

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \Big|_{y = \text{const}}. \quad (12.4)$$

Частной производной для функции двух переменных по одной из переменных называется величина равная пределу отношения приращения функции по этой переменной к величине приращения самой переменной при стремлении приращения к нулю и при постоянном значении другой переменной

ной.

Аналогично понятию дифференциала функции одной переменной и согласно выражения (12.2), можно ввести понятие дифференциала функции двух переменных следующим образом.

1). Введем сначала понятие частного дифференциала функции двух переменных по переменной  $x$  в виде произведения частной производной функции двух переменных по переменной  $x$  на дифференциал по этой переменной в виде

$$dz_x = \frac{\partial z}{\partial x} dx. \quad (12.5)$$

2). Введем понятие частного дифференциала функции двух переменных по переменной  $y$  в виде произведения частной производной функции двух переменных по переменной  $y$  на дифференциал по этой переменной в виде

$$dz_y = \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (12.6)$$

3). Сложим левые и правые части выражений (12.5) и (12.6), в результате получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (12.7)$$

Выражение (12.7) определяет понятие полного дифференциала функции двух переменных.

Поделим левую и правую части выражения (12.7) на величину дифференциала  $dy$ , в результате получим

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dy}.$$

Таким образом, окончательно получаем следующее выражение

$$\frac{dz(x, y)}{dy} = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}. \quad (12.8)$$



Выражение (12.8) будем понимать в виде полной производной функции двух переменных  $x$  и  $y$  по переменной  $y$ .

Рассмотрим силовое поле, которое характеризуется действием силового вектора  $\vec{A}$ , как функцию двух переменных

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (12.9)$$

Запишем (12.8) для вектора  $\vec{A}$ , считая, что полная производная от функции пространственной и временной координаты берется по переменной  $t$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}(\vec{r}, t)}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Пусть вектор мгновенной скорости  $\vec{v}$  равен нулю, тогда выражение (12.10) принимает вид

$$\frac{d\vec{A}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (12.11)$$

В дальнейшем замена полной производной по времени от функции нескольких переменных на частную производную по времени будет означать, что мы рассматриваем электромагнитные процессы в неподвижных средах, т.е. имеем дело с электродинамикой неподвижных сред.

Символически данный факт можно записать в следующем виде

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}. \quad (12.12)$$

### 13. Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме.

Ранее в параграфе 11 нами было получено выражение для

закона сохранения электрического заряда в интегральной форме в следующем виде

$$\oint_s (\vec{j} d\vec{s}) = - \int_v \frac{d\rho}{dt} dV. \quad (13.1)$$

Рассмотрим условие неподвижности электромагнитной среды. В данном случае для подинтегральной функции в правой части выражения (13.1) можно записать, что полная производная по времени от объемной плотности пространственного заряда равна частной производной по времени от этой величины

$$\frac{d\rho(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (13.2)$$

С учетом выражения (13.2) соотношение (13.1) принимает вид

$$\oint_s (\vec{j} d\vec{s}) = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (13.3)$$

Запишем теорему Остроградского-Гаусса для вектора плотности тока  $\vec{j}$

$$\oint_s (\vec{j} d\vec{s}) = - \int_v \operatorname{div} \vec{j} dV. \quad (13.4)$$

Приравниваем правые части выражений (13.3) и (13.4), тогда получаем

$$\int_v \operatorname{div} \vec{j} dV = - \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (13.5)$$

Два интеграла по одному и тому же объему равны тогда и только тогда, когда равны подинтегральные функции, тогда можно записать

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (13.6)$$

Выражение (13.6) в электродинамике понимается в виде закона сохранения электрического заряда в дифференциальной форме.

В технической электродинамике закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме понимается в виде уравнения непрерывности, которое записывается в следующем виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (13.7)$$

В соотношениях (13.6) и (13.7) выражение для дивергенции вектора плотности тока  $\vec{j}$  необходимо понимать в следующем виде

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx + \frac{\partial j_y}{\partial y} dy + \frac{\partial j_z}{\partial z} dz. \quad (13.8)$$

#### **14. Теорема о потоке вектора индукции магнитного поля.**

Экспериментально установлен следующий факт. Количество силовых магнитных линий, входящих в замкнутую поверхность  $S$  равно числу линий, выходящих из поверхности. Математически этот факт можно доказать только для частных случаев, в общем случае этот факт формулируется в качестве теоремы, доказательством которой является наличие экспериментально установленных фактов, следующих из нее и которая имеет вид

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{s}) = 0. \quad (14.1)$$

Выражение (14.1) в электродинамике понимается в виде теоремы о потоке вектора индукции магнитного поля. В технической электродинамике данная теорема понимается в виде закона неразрывности магнитных силовых линий.

Физический смысл этой теоремы заключается в том, что в природе отсутствуют свободные магнитные заряды, так как, число силовых линий, входящих в поверхность равно числу

силовых линий, выходящих из поверхности.

Запишем теорему Остроградского-Гаусса для вектора магнитной индукции

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{s}) = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV. \quad (14.2)$$

Приравняв правые части выражений (14.1) и (14.2), тогда можно записать

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0. \quad (14.3)$$

Интеграл равен нулю тогда и только тогда, когда подинтегральное выражение равно нулю, таким образом можно записать

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (14.4)$$

Выражение (14.4) в электродинамике рассматривается в виде теоремы о потоке вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  в дифференциальной форме.

### 15. Теорема Стокса.

Пусть поверхность  $S$  пронизывается силовым полем, описываемым силовым вектором от пространственных и временной координат

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (15.1)$$

Данный факт изображен на рис.1.14.



Рис.1.14

При исследовании свойств векторных полей, было отмечено, что кроме скалярных комбинаций частных производных проекций силового вектора  $\vec{A}$ , которая нами определена как дивергенция силового вектора  $\vec{A}$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (15.2)$$

также присутствует и векторная комбинация частных производных, которая записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} = & \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \\ & + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Возникавшая при исследовании различных физических явлений на основе понятий векторных полей величина (15.3) была названа ротором векторного поля.

Рассмотрим понятие ротора векторного поля  $\vec{A}$  на основе понятия проекции ротора векторного поля  $\vec{A}$  на направление внешней нормали

$$(\text{rot } \vec{A})_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L (\vec{A} d\vec{s})}{S}. \quad (15.4)$$

Выше было отмечено, что выражение (15.3), которое мы обозначили через ротор вектора  $\vec{A}$  можно раскрывать по правилу определителя 3-го порядка, элементы первой строки которого представляют из себя единичные орты  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \text{ и } \vec{e}_z$ , элементы второй строки представляют из себя частные производные по переменным  $x, y, z$ , а элементы третьей строки представляют из себя проекции силового вектора  $\vec{A}$  по осям  $OX, OY, OZ$ .

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

В курсе высшей математики в разделе теории векторного поля формулируется следующая теорема

$$\oint_L (\vec{A} d\vec{\ell}) = \int_S (\text{rot } \vec{A} d\vec{s}). \quad (15.5)$$

Выражение (15.5) в курсе высшей математики и в курсе электродинамики понимается в качестве теоремы Стокса.

**16. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в интегральной форме.**

Датский физик Эрстед в начале 19 века установил, что вокруг провода с током возникает магнитное поле, обладающее векторным характером воздействия на магнитную стрелку.

Векторный характер воздействия магнитного поля порождаемого проводником с током должен характеризоваться векторной величиной. В случае рассмотрения магнитного поля в среде такой векторной величиной является вектор на-

пряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . В случае рассмотрения существования магнитного поля в вакууме или в воздуха такой векторной величиной является вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ .

Анри Ампер на основе опытов Эрстеда установил закон, который математически можно записать в следующем виде

$$\oint_L \left( \vec{H} d\vec{\ell} \right) = I. \quad (16.1)$$

Выражение (16.1) в электродинамике понимается в виде теоремы о циркуляции вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ .

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру L равна алгебраической сумме токов охватываемых контуром.

В технической электродинамике выражение (16.1) называется также законом Ампера или законом полного тока. Запишем связь между интегральной I и дифференциальной j характеристиками тока

$$I = \int_S \left( \vec{j} d\vec{s} \right). \quad (16.2)$$

С учетом соотношения (16.2) выражение (16.1) принима-

ет вид

$$\oint_L \left( \vec{H} d\vec{l} \right) = \int_S \left( \vec{j} d\vec{s} \right). \quad (16.3)$$

Выражение (16.3) в электродинамике носит название теоремы о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$\vec{H}$  в интегральной форме.

Запишем теорему Стокса для вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$

$$\oint_L \left( \vec{H} d\vec{\ell} \right) = \int_S \left( \text{rot } \vec{H} d\vec{s} \right). \quad (16.4)$$

Приравнявая правые части выражений (16.3) и (16.4), далее можно записать

$$\int_S \left( \text{rot } \vec{H} d\vec{s} \right) = \int_S \left( \vec{j} d\vec{s} \right). \quad (16.5)$$

Два интеграла по одной и той же поверхности равны тогда и только тогда, когда равны подынтегральные функции, тогда из выражения (16.5) получаем

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (16.6)$$

Выражение (16.6) в электродинамике носит название теоремы о циркуляции вектора напряженности магнитного поля в дифференциальной форме, в технической электродинамике выражение (16.6) также называется законом полного тока в дифференциальной форме. В правой части выражения (16.6) фигурирует вектор плотности тока проводимости, в дальнейшем нами будут введены добавки в виде вектора плотности тока смещения, вектора плотности сторонних токов и вектора плотности магнитного тока.

### 17. Закон электромагнитной индукции.

Английский физик Майкл Фарадей проводя эксперименты по воздействию магнитного поля на замкнутый контур,



пришел к выводу, что в контуре возникает индукционный ток всякий раз, когда происходит изменение магнитного потока, пронизывающего контур. Суть экспериментов Фарадея можно представить с помощью следующих трех опытов.

1). Индукционный ток возникает в проводнике, замкнутом на гальванометр, следующих двух случаях. Во-первых, ток возникает в контуре проводника, когда проводник является неподвижным, а постоянный магнит перемещается относительно проводника. Во-вторых, ток возникает в контуре проводника, когда постоянный магнит является неподвижным, а проводник перемещается относительно проводника. Данный опыт изображен схематично на двух рисунках 1.15. На основе своих экспериментов, Фарадей установил, что при любом изменении магнитного потока, пронизывающего контур, гальванометр показывал наличие тока.

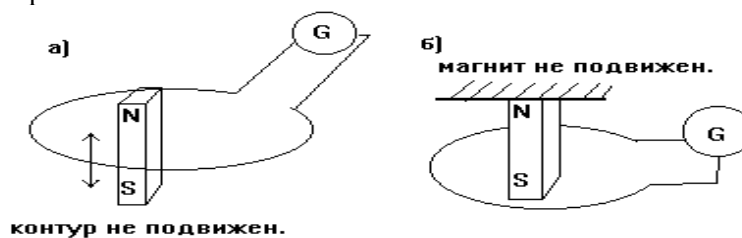


Рис. 1.15

2). Оба контура являются неподвижными, но в первом контуре происходит изменение величины тока путем замыкания или размыкания ключа. Данный опыт приведен на рис.1.16.



Рис. 1.16

3). Происходит деформация одного из контуров путем его или сжатия или растяжения. Данный факт изображен на рис.1.17.

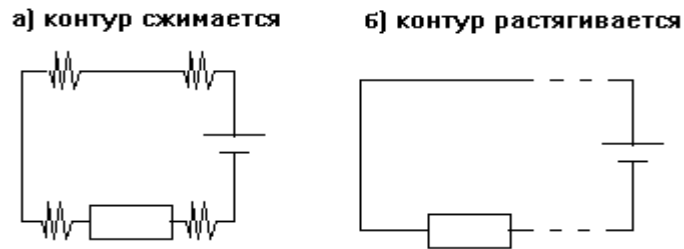


Рис.1.17

Исходя из результатов проведенных экспериментов, Максвелл установил, что величина заряда, протекающего через гальванометр, определяется следующим выражением

$$\Delta q = \frac{\Delta \Phi}{R}. \quad (17.1)$$

В выражении (17.1) величина  $\Delta q$  означает величину заряда, прошедшего через гальванометр. Величина  $\Delta \Phi$  означает число силовых линий, пронизывающих плоскость контура. Величина  $R$  определяет величину электрического сопротивления контура замкнутого проводника.

Фарадей хотя и установил универсальный закон электромагнитной индукции, но объяснить его он не смог. Дело в том, что, во-первых, в выражении (17.1) фигурирует величина  $R$ , которая определяет величину электрического сопротивления, а так как величина сопротивления определяет величину потерь на нагрев, то величина  $R$  в (17.1) характеризует конкретный проводник, во вторых число силовых линий  $\Delta \Phi$  Фарадеем подсчитывалось по разному в случае приближения и удаления магнита. Эти трудности были преодолены двумя путями.

1). Георг Ом установил экспериментально следующий закон для замкнутой электрической цепи

$$I = E / R . \quad (17.2)$$

В выражении (17.2) введены следующие обозначения  $E$  – электродвижущая сила (ЭДС), включенная в цепь,  $R$  - полное активное сопротивление цепи или сопротивление нагрузки.

2). Джеймс Максвелл ввел в рассмотрение понятие магнитного потока, определяемое следующим выражением

$$\Phi = \int_S \left( \vec{B} d\vec{s} \right). \quad (17.3)$$

Понятие магнитного потока, определяемое выражением (17.3), введенное в рассмотрение Максвеллом, аналогично понятию числа силовых линий  $\Delta\Phi$  у Фарадея.

Из соотношения (17.2) следует следующее выражение

$$R = E / I . \quad (17.4)$$

Подставляя выражение (17.4) в соотношение (17.1), далее получаем

$$\Delta Q = I \cdot \Delta\Phi / E \quad (17.5)$$

Величина силы тока  $I$  равна величине заряда  $\Delta q$ , прошедшего через поперечное сечение проводника  $S$  за промежуток времени  $\Delta t$ , т.е.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (17.6)$$

Выражение (17.5) с учетом соотношения (17.6) принимает вид

$$\Delta q = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot \Delta\Phi / E . \quad (17.7)$$

Из выражения (17.7) получаем, что

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (17.8)$$

Перейдем в выражении (17.8) от отношения приращения функции к приращению аргумента к пределу этих отношений при стремлении приращения аргумента к нулю, тогда можно записать

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (17.9)$$

Электродвижущая сила электромагнитной индукции (ЭДС), возникающая в контуре, равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур, взятой с обратным знаком.

Знак минус в выражении (17.9) означает правило Ленца. Физически знак минус, т.е. правило Ленца означает закон сохранения энергии в электродинамике.

**Правило Ленца.** Индукционный ток, всегда направлен таким образом, что его собственное магнитное поле, препятствует изменению магнитного потока, вызвавшего данный индукционный ток.

Явление электромагнитной индукции Фарадея открыто экспериментально, и представляет из себя фундаментальное физическое явление, состоящее в возникновении индукционного тока в замкнутом проводнике, при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего контур проводника.

### 18. Обобщенный закон электромагнитной индукции.

Джеймс Максвелл обобщил результаты экспериментов Фарадея на общий случай, а именно убрал из экспериментов Фарадея замкнутый проводник и выдвинул следующую гипотезу.

**Гипотеза Максвелла.** Всякое изменение магнитного потока в пространстве, вызывает возникновение ЭДС электромагнитной индукции в каждой точке рассматриваемого пространства.

Проверить справедливость гипотезы Максвелла можно

экспериментально следующим образом. Во-первых, если поместить в пространство, в котором была создана ЭДС индукции, замкнутый контур, то ЭДС создаст в контуре индукционный ток. Во-вторых, если поместить в данное пространство диэлектрик, то ЭДС индукции приведет к поляризации диэлектрика. Аналогично можно привести и другие подтверждения справедливости данной гипотезы.

Рассмотрим преобразования левой и правой частей выражения (17.9).

1. Преобразуем левую часть выражения (17.9)

$$\begin{aligned} E &= \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{\oint_L \delta A_{\text{стор}}}{q} = \frac{\oint_L \left( \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{\ell} \right)}{q} = \\ &= \frac{\oint_L \left( q \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{\ell} \right)}{q} = \frac{\oint_L \left( q \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{\ell} \right)}{q} = \oint_L \left( \vec{E} d\vec{\ell} \right). \end{aligned} \quad (18.1)$$

Далее учтем тот факт, в общем случае существует два вида электрических полей, во-первых, электростатические поля, определяемые вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}_{\text{кул}}$ , а также электрические поля не электростатического происхождения, которые определяются понятием вектором напряженности электрического поля сторонних сил  $\vec{E}_{\text{стор}}$ .

Согласно принципа суперпозиции электрических полей можно записать следующее выражение для вектора напряженности результирующего электрического поля

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (18.2)$$

Выражение (18.1) с учетом соотношения (18.2) и с учетом принципа дистрибутивности скалярного произведения векторов принимает вид

$$\oint_L \left( \vec{E} - \vec{E}_{\text{кул}} \right) d\vec{\ell} = \oint_L \left( \vec{E} d\vec{\ell} \right) - \oint_L \left( \vec{E}_{\text{кул}} d\vec{\ell} \right). \quad (18.3)$$

В курсе физики формулируется следующая теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля, записываемой в виде

$$\oint_L \left( \vec{E}_{\text{кул}} d\vec{\ell} \right) = 0. \quad (18.4)$$

С учетом выражения (18.4) соотношение (18.3) принимает следующий вид

$$\oint_L \left( \vec{E} d\vec{\ell} \right). \quad (18.5)$$

Выражение (18.5) представляет из себя понятие электродвижущей силы электромагнитной индукции.

2. Запишем выражение для быстроты изменения магнитного потока, пронизывающего контур неподвижного проводника, в случае, когда обыкновенная производная по времени равна частной производной по времени

$$\frac{d\Phi(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (18.6)$$

Выражение (18.6) представляет из себя условие неподвижности электродинамических сред, которое можно рассматривать также в виде условия неподвижности контура интегрирования L.

С учетом выражений (18.5) и (18.6) запишем выражение (18.1) в следующем виде

$$\oint_L \left( \vec{E} d\vec{l} \right) = - \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (18.7)$$

Выражение (18.7) представляет из себя понятие обобщенного закона электромагнитной индукции в интегральной форме, который можно сформулировать в следующем виде.

Циркуляция вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру  $L$ , равна скорости изменения магнитного потока пронизывающего контур, взятой с обратным знаком.

Запишем выражение (18.7) в интегральной форме. Для этого введем в рассмотрение понятие потока вектора индукции магнитного поля

$$\Phi = \int_S (\vec{B} d\vec{s}). \quad (18.8)$$

Продифференцируем по времени левую и правую части выражения (18.8)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B} d\vec{s}) = \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \right). \quad (18.9)$$

Выражение (18.7) с учетом соотношения (18.9) принимает вид

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \right). \quad (18.10)$$

Выражение (18.10) представляет из себя обобщенный закон электромагнитной индукции в интегральной форме, из которого следует следующий факт.

Силовые поля, циркуляция которых по замкнутому контуру отлична от нуля, называются соленоидальными или вихревыми. Силовые линии, таких полей являются замкнутыми.

Таким образом, электрическое поле, созданное переменным магнитным полем, является вихревым, силовые линии, которого являются замкнутыми. Данный факт изобразим с помощью рис.1.18.

Направление векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  на рис.1.18 определяется правилом левого винта или правилом правой руки.

Запишем выражение теореме Стокса для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ .

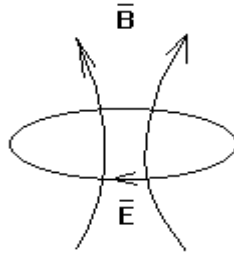


Рис. 1.18

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{\ell}) = \int_S (\text{rot } \vec{E} d\vec{s}). \quad (18.11)$$

Приравнявая правые части выражений (18.10) и (18.11), получаем следующее выражение

$$\int_S (\text{rot } \vec{E} d\vec{s}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \right). \quad (18.12)$$

Два интеграла по одной и той же поверхности равны тогда и только тогда, когда равны подынтегральные функции, поэтому можно записать

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (18.13)$$

Выражение (18.13) представляет из себя обобщенный закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме.

### 19. Вектор плотности тока смещения.

Рассмотрим физическую картину протекания электрического тока между заряженными обкладками конденсатора. Для чего одну из обкладок конденсатора окружим поверхностью  $S$ , внутри которой будет находится заряд  $Q$ .



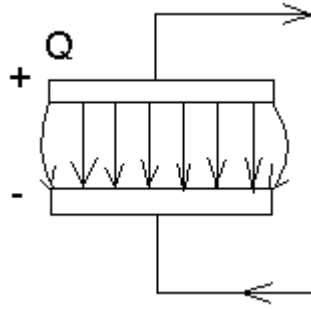


Рис.1.19

Запишем теорему о потоке вектора напряженности электрического поля в интегральной форме

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad (19.1)$$

Продифференцируем левую и правую части выражения (19.1) по времени

$$\frac{d}{dt} \oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dt}.$$

Далее меняя операции дифференцирования и интегрирования можно записать

$$\epsilon_0 \oint_S \left( \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{s} \right) = \frac{dq}{dt}. \quad (19.2)$$

Ранее мы определили быстроту изменения заряда через сечение проводника как силу тока. Так как мы рассматриваем ток, протекающий между обкладками конденсатора, то будем называть этот ток током смещения. На основании сказанного определим ток смещения следующим образом

$$I_{\text{см}} = \frac{dq}{dt}. \quad (19.3)$$

Будем рассматривать случай неподвижной среды, т.е. считаем поверхность  $S$  неподвижной. В данном случае пол-

ную производную по времени от вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  можно заменить на частную

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (19.4)$$

С учетом выражений (19.3) и (19.4) соотношение (19.2) запишется в вид

$$\epsilon_0 \oint_S \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} \right) = I_{\text{см}}. \quad (19.5)$$

Запишем связь между интегральной и дифференциальной характеристиками тока для случая тока смещения

$$I_{\text{см}} = \int_S \left( \vec{j}_{\text{см}} d\vec{s} \right). \quad (19.6)$$

С учетом (19.6) выражение (19.5) примет вид

$$\oint_S \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} \right) = \oint_S \left( \vec{j}_{\text{см}} d\vec{s} \right). \quad (19.7)$$

Два интеграла по одной и той же замкнутой поверхности равны тогда и только тогда, когда равны подинтегральные функции. Поэтому можно записать

$$\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (19.8)$$

Величину, определяемую соотношением (19.8) в дальнейшем будем называть вектором плотности тока смещения. Так как эта величина определяется быстротой изменения вектора напряженности электрического поля, то, в дальнейшем говоря о токе смещения, мы фактически будем иметь в виду изменяющееся электрическое поле.

Ранее в параграфе 16 было получено выражение для закона полного тока в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}. \quad (19.9)$$

Выражение (19.9) было нами получено для случая магнитостатических полей. Максвелл предположил, что для переменных магнитных полей закон полного тока можно записать аналогично выражению (19.9) введя в правую часть дополнительное слагаемое в виде вектора плотности тока смещения

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}. \quad (19.10)$$

Выражение (19.10) в курсе физики называется теоремой о циркуляции вектора напряженности переменного магнитного поля в дифференциальной форме. В технической электродинамике оно называется законом полного тока для переменного магнитного поля.

При расчете диаграммы направленности излучения радиоантенны, в правую часть выражения (19.10) добавляются также две других векторных составляющих полного тока. Во-

первых,  $\vec{j}_{\text{стор}}$ , связанная с влиянием сторонних источников и  $\vec{j}_{\text{магн}}$ , которая называется вектором плотности магнитных токов. Данные составляющие используются при расчете диаграммы направленности излучения радиоантенн в сложных случаях.

На основании результатов Фарадея и Максвелла можно сделать вывод, что явление электромагнитной индукции, фактически представляет из себя два различных взаимосвязанных явления электромагнитной индукции.

**1). Явление электромагнитной индукции Фарадея.** В данном случае переменное (вихревое) магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Явление открыто экспериментально Фарадеем. Математическая формулировка данного вида электромагнитной индукции в дифференциальной форме может быть записано в следующем виде

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**2). Явление электромагнитной индукции Максвелла.** В данном случае переменное (вихревое) электрическое поле порождает вихревое магнитное поле. Это явление открыто теоретически Максвеллом. Математическая формулировка данного вида электромагнитной индукции в дифференциальной форме может быть записана в следующем виде

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Экспериментальное доказательство взаимосвязи явлений электромагнитной индукции заключается в том факте, что электромагнитное поле может существовать только в виде электромагнитной волны.

## **20. Поведение диэлектриков в электрическом поле.**

Все диэлектрики можно разделить на два типа.

**1.** Диэлектрики, состоящие из неполярных молекул (газы –  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2$  и т.д.).

**2.** Диэлектрики, состоящие из полярных молекул ( $H_2O$ ,  $HCl$  и т.д.).

**Неполярными молекулами** называются молекулы, у которых центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствии внешнего электрического поля, совпадают.

**Полярными молекулами** называются молекулы, у которых центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствии внешнего электрического поля не совпадают.

При помещении диэлектриков во внешнее электрическое поле происходит поляризация диэлектриков. Различают следующие виды поляризации.

**1). Электронная поляризация.** Этот вид поляризации свойственен диэлектрикам, состоящим из неполярных молекул. Рассмотрим случай (а) на рис.1.21, когда внешнее элек-

трическое поле отсутствует. В данном случае центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают. Следовательно, во-первых, отсутствует условие разделение зарядов, т.е. неполярная молекула не обладает дипольным электрическим моментом. Во вторых, каждая неполярная молекула в любой точке пространства не создает собственного электрического поля ввиду компенсации полей положительных и отрицательных зарядов. На основании этого заключаем, что, и весь объем диэлектрика также не создает в пространстве электрического поля.

Рассмотрим случай (б) на рис.1.20, когда внешнее электрическое поле отлично от нуля. В данном случае на положительные и отрицательные заряды молекулы действует сила со стороны внешнего

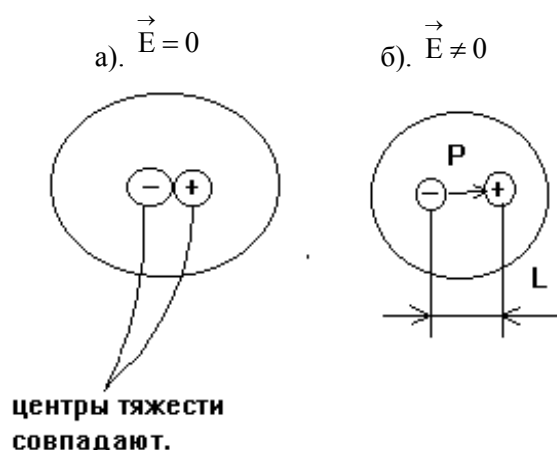


Рис. 1.20  
электрического поля, равная

$$\vec{F} = q \vec{E}. \quad (20.1)$$

Из выражения (20.1) видно, что данная сила будет приводить к движению положительных и отрицательных зарядов в противоположных направлениях и, следовательно, будет происходить разделение центров тяжести положительных и отрицательных зарядов. В результате молекула диэлектрика

становится молекулой-диполем и характеризуется понятием дипольного электрического момента

$$\vec{p} = q \vec{L}, \quad (20.2)$$

В выражении (20.2) величина  $q$  является величиной заряда молекулы-диполя, а вектор  $\vec{L}$  направлен от центра тяжести отрицательных зарядов к центру тяжести положительных зарядов, а его модуль называется плечом диполя. Следует иметь в виду, что тепловое движение молекул в диэлектрике не оказывает никакого нежелательного воздействия на ориентацию вектора дипольного электрического момента вдоль направления вектора напряженности внешнего электрического поля.

**2). Ориентационная поляризация.** В данном случае, при помещении полярной молекулы во внешнее электрическое поле, на жестко связанные заряды в диполе будет действовать пара сил, приводящая к возникновению вращающего момента, т.е. к повороту диполя таким образом, что он будет занимать положение около направления вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ .

Данный факт приведен на рис.1.21.

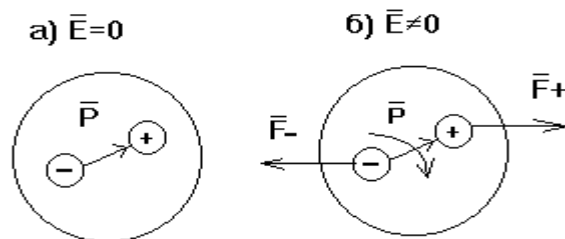


Рис. 1.21

Так как молекула-диполь обладает инертностью, то, участвуя во вращательном движении, молекула-диполь вследствие инертности будет проскакивать положение равновесия вдоль направления вектора напряженности внешнего электрического поля. После такого проскакивания на молекулу-диполь начинает действовать вращательный момент в противоположном направлении, приводящий к повороту молекулы-

диполя в противоположном направлении. Таким образом, в установившемся режиме молекула-диполь будет осуществлять колебательный процесс около направления вектора напряженности внешнего электрического поля.

Тепловое движение молекул в данном случае оказывает дополнительное влияние на разориентацию вектора дипольного электрического момента  $\vec{P}$  относительно направления вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ .

Для количественной характеристики явления поляризации, как в случае полярных, так в случае неполярных молекул, вводят в рассмотрение понятие вектора поляризации. Данный вектор определяется следующим образом

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\Delta V}. \quad (20.3)$$

В выражении (20.3) величина  $N$  определяет понятие числа молекул-диполей в элементе объема  $\Delta V$ , который с одной стороны считается настолько малым, что в его пределах величина напряженности внешнего электрического поля считается постоянной, а с другой стороны он считается настолько большим, что в нем находится достаточное число молекул-диполей, чтобы можно было применить методы статистиче-

ской физики. Величина  $\vec{p}_i$  определяет понятие дипольного электрического момента  $i$ -той молекулы диполя.

Рассмотрим выражение (20.3) для случая электронной поляризации, когда все векторы дипольных электрических моментов  $\vec{p}_i$  расположены строго по направлению вектора внешнего электрического поля  $\vec{E}$ . В данном случае выражение (20.3) принимает вид

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N \cdot \vec{p}}{\Delta V} = \vec{p} \cdot \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{N}{\Delta V} = \vec{p} \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} n = \vec{p} \cdot n.$$

Итак, окончательно для вектора поляризации в случае электронной поляризации можно записать

$$\vec{P} = \vec{p} \cdot n. \quad (20.4)$$

В выражении величина  $n$  называется концентрацией молекул в диэлектрике,  $\vec{p}$  - дипольный электрический момент отдельной молекулы диполя.

## 21. Объемная плотность поляризационных зарядов.

Рассмотрим понятие объемной плотности поляризационных зарядов сначала на основе простейшего плоского случая, а затем полученный результат обобщим на общий пространственный случай.

### 1). Плоский случай.

Будем рассматривать понятие объемной плотности поляризационных зарядов на основе простейшего случая поляризации - электронной поляризации. Изобразим на рисунке плоский участок объема диэлектрика шириной  $\Delta x$ . Пусть вектор напряженности внешнего электрического поля  $\vec{E}$  направлен слева направо. Исходя из рисунка, заключаем, что слева направо в плоский слой будут входить

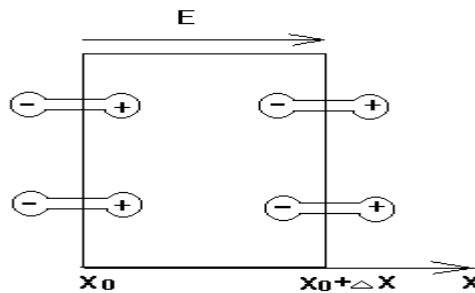


Рис. 1.22

положительные заряды, а справа налево в слой будут



входить отрицательные заряды. Рассмотрим отдельно эти случаи.

**а). Движение зарядов слева направо.**

Запишем для величины положительного заряда, вошедшего в плоский слой слева направо следующее выражение

$$\begin{aligned} Q^+ &= N(x_0)q_+ = N(x_0)q = n(x_0)Vq = n(x_0)SLq \\ &= n(x_0)Sp = Sn(x_0)p = SP(x_0). \end{aligned} \quad (21.1)$$

Выражение (21.1) определяет величину положительного заряда, вошедшего в плоский слой. Величина  $N(x_0)$  определяет количество единиц положительного заряда, вошедших в плоский слой, величина  $n(x_0)$  определяет величину концентрации зарядов на левой границе слоя, величина  $S$  определяет величину площади поперечного сечения, величина  $P(x_0)$  определяет величину модуля вектора поляризации на левой границе слоя, величина  $p$  определяет величину модуля вектора дипольного электрического момента молекулы диполя, величина  $V$  определяет величину объема плоского слоя диэлектрика.

**б). Движение зарядов справа налево.**

Запишем для величины отрицательного заряда, вошедшего в плоский слой справа налево следующее выражение

$$\begin{aligned} Q^- &= N(x_0 + \Delta x)q_- = -N(x_0 + \Delta x)q = -n(x_0 + \Delta x)Vq = \\ &= -n(x_0 + \Delta x)SLq = -SP(x_0 + \Delta x). \end{aligned} \quad (21.3)$$

Полный заряд, вошедший в объем диэлектрика будет равен сумме положительного заряда, вошедшего в плоский слой слева направо и отрицательного заряда, вошедшего в слой справа налево

$$\Delta Q = q_+ + q_-. \quad (21.3)$$

С учетом (21.1) и (21.2) выражение (21.3) примет следующий вид

$$\Delta Q = SP(x_0) + (-SP(x_0 + \Delta x)) = -S(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)). \quad (21.4)$$

Поделим левую и правую части выражения (21.4) на величину объема плоского слоя диэлектрика  $\Delta V$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} = - \frac{S(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0))}{\Delta V} = - \frac{S(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0))}{S \Delta x},$$

откуда получаем

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} = - \frac{(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0))}{\Delta x}. \quad (21.5)$$

Выражение (21.5) получено для случая одномерного движения зарядов в область плоского слоя в направлении оси ОХ.

Перейдем в левой и правой частях выражения (21.5) к пределу при  $\Delta V \rightarrow 0$ . Ширина плоского слоя диэлектрика  $\Delta x$  также будет стремиться к нулю

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = - \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0))}{\Delta x}. \quad (21.6)$$

Рассмотрим каждое из выражений в левой и правой частях выражения (21.6)

$$1. \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} = \rho_{\Pi}.$$

Данную величину будем рассматривать в качестве объемной плотности поляризационных зарядов.

$$2. \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{(P(x_0 + \Delta x) - P(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{dP}{dx} = \frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

Данную величину будем рассматривать в качестве частной производной иксовой проекции вектора поляризации, так как мы рассматриваем только движение зарядов вдоль направления оси ОХ, поэтому обыкновенная производная по переменной  $x$  будет равна частной производной по перемен-

ной  $x$ .

С учетом введенных в рассмотрение величин выражение (21.6) принимает следующий вид

$$\rho_{\Pi} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}. \quad (21.7)$$

Выражение (21.7) представляет собой связь объемной плотности поляризационных зарядов с вектором поляризации для случая плоского слоя объема диэлектрика.

## 2). Объемный случай.

В случае движения поляризованных зарядов в пространстве, т.е. по осям  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  прямоугольной системы координат, мы получим составляющие объемной плотности поляризационных зарядов по каждому из направлений. Тогда согласно выражения (21.7) можно записать следующие выражения для составляющих объемной плотности пространственного заряда по соответствующим осям координат

$$\begin{aligned} \rho_{\Pi x} &= -\frac{\partial P_x}{\partial x}, \\ \rho_{\Pi y} &= -\frac{\partial P_y}{\partial y}, \\ \rho_{\Pi z} &= -\frac{\partial P_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (21.8)$$

Складывая, левые и правые части системы уравнений (21.8), получаем

$$\rho_{\Pi x} + \rho_{\Pi y} + \rho_{\Pi z} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right).$$

Учитывая понятие дивергенции вектора поляризации  $\vec{P}$ , далее получаем

$$\rho_{\Pi} = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (21.9)$$

Выражение (21.9) представляет собой связь объемной плотности поляризационных зарядов с вектором поляризации.

Приведенный вывод выражения (21.9) следует рассмат-

ривать в чисто качественном виде. Более строгое рассмотрение явления поляризации в рамках курса физики твердого тела, приводит точно к такому же результату.

## 22. Теорема о потоке вектора электрического смещения.

В параграфе 8 была сформулирована теорема о потоке вектора напряженности электрического поля

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (22.1)$$

Определим величину объемной плотности заряда  $\rho$ , как отношение элементарной величины заряда  $dq$  к величине элементарного объема  $dV$

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (22.2)$$

В диэлектрике все заряды можно разделить на 2 типа.

1. Свободные электрические заряды, рассматриваемые в качестве электронов проводимости, объемную плотность которых обозначим как  $\rho_{св}$ .

2. Связанные электрические заряды, входящие в состав атомов, которые подверглись явлению поляризации и которые называются поляризованными зарядами, объемную плотность которых обозначим как  $\rho_{п}$ .

Поэтому для суммарной объемной плотности зарядов можно записать

$$\rho = \rho_{св} + \rho_{п}. \quad (22.3)$$

Тогда выражение (22.1) с учетом (22.3) принимает вид

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho_{св} + \rho_{п}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_{св} dV + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_{п} dV. \quad (22.4)$$

Учтем ранее полученную связь между объемной плотностью поляризационных зарядов и вектором поляризации в

следующем виде

$$\rho_{\Pi} = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (22.5)$$

Тогда выражение (22.4) с учетом соотношения (22.5) принимает вид

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V (\rho_{CB} + \rho_{\Pi}) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_{CB} dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV. \quad (22.6)$$

Запишем Теорему Остроградского-Гаусса для вектора поляризации  $\vec{P}$

$$\oint_S (\vec{P} d\vec{s}) = \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV. \quad (22.7)$$

С учетом выражения (22.7) соотношение (22.6) принимает следующий вид

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{s}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_{CB} dV - \frac{1}{\varepsilon_0} \oint_S (\vec{P} d\vec{s}).$$

Далее перенесем второе слагаемое в правой части в левую и учтем, что сумма интегралов по одной и той же поверхности равна интегралу суммы. Далее после применения свойства дистрибутивности скалярного произведения запишем

$$\oint_S (\vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}) d\vec{s} = \int_V \rho_{CB} dV. \quad (22.8)$$

Введем в рассмотрение следующую векторную величину

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (22.9)$$

Вектор  $\vec{D}$ , определяемый соотношением (22.9), получил название вектора электрического смещения. С учетом выражения (22.9) соотношение (22.8) принимает следующий вид

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{s}) = \int_V \rho_{CB} dV. \quad (22.10)$$

Выражение (22.10) в электродинамике получило название теоремы о потоке вектора электрического смещения в веществе в интегральной форме, которую можно сформулировать в следующем виде. Поток вектора электрического смещения  $\vec{D}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме электрических зарядов, находящихся внутри замкнутой поверхности  $S$ .

Запишем теорему Остроградского-Гаусса для вектора электрического смещения  $\vec{D}$

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{s}) = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV. \quad (22.11)$$

Приравнявая правые части выражений (22.10) и (22.11), далее получаем

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho_{CB} dV.$$

Два интеграла по одному и тому же объему равны тогда и только тогда, когда равны их подинтегральные функции. Таким образом, получаем

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{CB}. \quad (22.12)$$

Выражение (22.12) в электродинамике носит название теоремы о векторе электрического смещения в дифференциальной форме.

### 23. Материальное уравнение для электрического поля.

В предыдущем параграфе было введено в рассмотрение понятие вектора электрического смещения

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}, \quad (23.1)$$

Так как вектор электрического смещения  $\vec{D}$  равен векторной сумме вектора  $\epsilon_0 \vec{E}$ , и вектора  $\vec{P}$ , а вектор напряженности электрического  $\vec{E}$  является основной характеристикой электрического поля, а вектор  $\vec{P}$  характеризует конкретный вид среды, то на основании сказанного заключаем, что вектор электрического смещения  $\vec{D}$  является вспомогательной силовой характеристикой электрического поля и он характеризует электрическое поле в среде.

Экспериментально установлена следующая зависимость

$$\vec{P} = \lambda_E \vec{E}, \quad (23.2)$$

где величина  $\lambda_E$  называется электрической восприимчивостью диэлектрика и которая характеризует степень поляризуемости вещества.

С учетом выражения (23.2) выражение (23.1) принимает следующий вид

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \lambda_E \vec{E} = \vec{E}(\epsilon_0 + \lambda_E) = \epsilon_a \vec{E}.$$

Итак, можно записать

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}. \quad (23.3)$$

Выражение (23.3) в электродинамике носит название материального уравнения для электрического поля в среде. При этом величина

$$\epsilon_a = \epsilon_0 + \lambda_E \quad (23.4)$$

называется абсолютной диэлектрической проницаемостью среды.

В технической электродинамике кроме характеристики  $\epsilon_a$  вводится также относительная диэлектрическая проницаемость вещества, определяемую следующим выражением

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0}. \quad (23.5)$$

Из (23.4) с учетом выражения (23.5) получаем

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 + \lambda_E}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\lambda_E}{\varepsilon_0}. \quad (23.6)$$

Значение относительной диэлектрической проницаемости среды для вакуума принимается равным ( $\varepsilon_{\text{ВАК}} = 1$ ), а для воздуха – ( $\varepsilon_{\text{ВОЗД}} \approx 1$ ).

Из (23.5) получаем выражение для абсолютной диэлектрической проницаемости среды в следующем виде

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon. \quad (23.7)$$

#### 24. Магнитное поле в веществе.

Любое вещество состоит из молекул, в состав которых входят атомы. В атоме движение электронов можно отождествлять с понятием микротока, создающего магнитное поле. Рассмотрим схематически движение электрона в атоме на основе рис.1.23, учитывая, что за направление тока принимается движение положительного заряда, т.е. на рисунке электрон вращается по часовой стрелке, а микроток направлен против часовой стрелки.

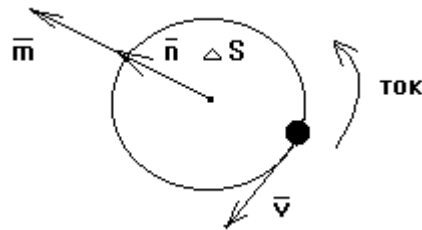


Рис.1.23

Для рассматриваемого рисунка введем в рассмотрение следующие обозначения:  $\Delta S$  - площадь орбиты электрона,  $\vec{n}$  -



вектор единичной нормали. Введем в рассмотрение следующие векторные величины

$$\vec{\Delta S} = \Delta S \vec{n}, \quad (24.1)$$

$$\vec{m} = I \Delta S. \quad (24.2)$$

Вектор, определяемый выражением (24.1), называется псевдовектором. Его модуль равен площади орбиты электрона, а направление совпадает с направлением нормали  $\vec{n}$ . Вектор, определяемый выражением (24.2), представляет из себя понятие магнитного момента микротока в атоме, где  $I$  - величина микротока.

При помещении различных веществ в магнитное поле их поведение можно разделить на три вида

**1). Диамагнитные вещества.**

**а).** Рассмотрим поведение диамагнитного вещества в отсутствие внешнего магнитного поля. В данном случае магнитные моменты атомов будут ориентироваться хаотически в пространстве.

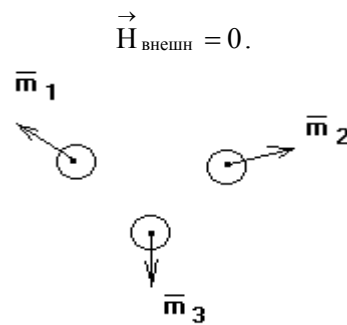


Рис. 1.24

**б).** Включим внешнее магнитное поле. Пусть первый атом в магнитном поле сориентирован таким образом, что его магнитный момент направлен против поля, у второго атома так-

же магнитный момент направлен против поля, но не полностью, а у третьего атома магнитный момент будет направлен по полю как это показано на рис.1.25. Такая ориентация магнитных моментов атомов будет приводить к ослаблению внешнего магнитного поля. Вещества, которые ведут себя в присутствии внешнего магнитного поля подобным образом называются диамагнитными или диамагнетиками.

$$\vec{H}_{\text{внешн}} \neq 0.$$

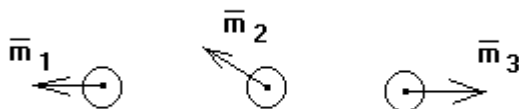


Рис.1.25

Диамагнитные вещества (диамагнетики) к которым относятся большинство из веществ, ведут себя во внешнем магнитном поле так, что часть атомов ориентируется таким образом, что их собственное магнитное поле ослабляет действие внешнего магнитного поля, однако эффект диамагнетизма является крайне слабым.

Диамагнитными свойствами обладает ионизированный газ (плазма), который нами будет отождествляться с понятием ионосферы.

## 2). Парамагнитные вещества.

К данному виду веществ относятся в основном щелочные металлы.

**а).** Рассмотрим случай, когда внешнее поле отсутствует. В данном случае векторы магнитных моментов атомов аналогично предыдущему случаю ориентируются хаотически относительно направления внешнего магнитного поля. Данный факт изображен на рис. 1.26.

**б).** Включим внешнее поле ( $\vec{H}_{\text{внешн}} \neq 0$ ). В данном случае векторы магнитных моментов части атомов будут ориентиро-

ваться преимущественно по направлению вектора напряженности внешнего магнитного поля.

$$\vec{H}_{\text{внешн}} = 0.$$

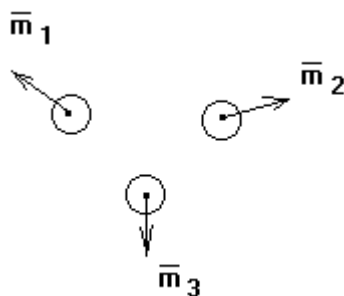


Рис. 1.26

Парамагнитные вещества обладают тем свойством, что при помещении их во внешнее магнитное поле, часть атомов вещества ориентируется таким образом, что их магнитные моменты ориентируются по направлению внешнего магнитного поля, тем самым парамагнитные вещества усиливают действие внешнего магнитного поля, однако этот эффект как и в случае диамагнитных веществ также проявляется крайне слабо.

### 3). Ферромагнитные вещества.

Существуют вещества (железо, никель, кобальт и др.), у которых парамагнитный эффект проявляется очень сильно, в том смысле, что при помещении их во внешнее магнитное поле, эти вещества очень сильно увеличивают действие внешнего магнитного поля.

## 25. Материальное уравнение для магнитного поля.

Запишем выражение, связывающее вектор магнитной индукции и вектор напряженности магнитного поля для случая вакуума

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (25.1)$$

Соотношение (25.1) связывает основную силовую характеристику магнитного поля в вакууме в виде вектора магнитной индукции  $\vec{B}_0$  с вспомогательной характеристикой магнитного поля в виде вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ .

Для случая среды, соотношение (25.1) запишем в следующем виде

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}_{\text{внешн}} + \vec{H}_{\text{внутр}}). \quad (25.2)$$

В данном выражении величину  $\vec{H}_{\text{внешн}}$  будем называть вектором напряженности внешнего магнитного поля, а величину  $\vec{H}_{\text{внутр}} = \vec{J}$  будем называть соответственно вектором напряженности внутреннего магнитного поля или вектором намагниченности. Таким образом, в дальнейшем будем считать, что вектор намагничиваемости характеризует магнитные свойства вещества.

Экспериментально установлено, что вектор намагниченности пропорционален величине напряженности внешнего магнитного поля

$$J \propto H \quad (25.3)$$

Введем в рассмотрение коэффициент пропорциональности и запишем соотношение (25.3) в векторной форме, учитывая, что вектор намагниченности и вектор напряженности внешнего магнитного поля, являются сонаправленными

$$\vec{J} = \lambda_H \vec{H}_{\text{внешн}}. \quad (25.4)$$

В выражении (25.4) величина  $\lambda_H$  называется магнитной восприимчивостью вещества.

С учетом (25.4) соотношение (25.2) при опускании индекса у вектора  $\vec{H}$ , примет следующий вид

$$\vec{B} = \mu_0 \left( \vec{H} + \vec{J} \right) = \mu_0 \left( \vec{H} + \lambda_H \vec{H} \right) = \mu_0 (1 + \lambda_H) \vec{H}. \quad (25.5)$$

Запишем выражение (25.5) в следующем виде

$$\vec{B} = \mu_A \vec{H}. \quad (25.6)$$

Выражение (25.6) в электродинамике называется материальным уравнением для магнитного поля в веществе.

В выражении (25.6) величина

$$\mu_A = \mu_0 (1 + \lambda_H). \quad (25.7)$$

представляет из себя понятие абсолютной магнитной проницаемости среды.

В технической электродинамике наряду с понятием абсолютной магнитной проницаемости, используется и понятие магнитной проницаемости среды, которая также называется относительной магнитной проницаемостью среды и которая определяется следующим образом

$$\mu = \frac{\mu_A}{\mu_0}. \quad (25.8)$$

Выражение (25.8) представляет из себя понятие относительной магнитной проницаемости среды. С учетом выражения (25.7) выражение (25.8) принимает следующий вид

$$\mu = \frac{\mu_A}{\mu_0} = \frac{\mu_0 (1 + \lambda_H)}{\mu_0} = 1 + \lambda_H. \quad (25.9)$$

Таким образом, согласно выражения (25.9) можно записать следующие значения для магнитных проницаемостей различных веществ

$\mu \leq 1$	- для диамагнетиков,
$\mu \geq 1$	- для парамагнетиков,
$\mu \gg 1$	- для ферромагнетиков.

В технической электродинамике, при заполнении волно-

водов и резонаторов различными веществами, вводится понятие магнитодиэлектрика, т.е. вещества которое одновременно характеризуется и диэлектрической и магнитной проницаемостью среды.

## 26. Поляризационные и сторонние токи.

В параграфе 21 было получено выражение, связывающее объемную плотность поляризационных зарядов с вектором поляризации

$$\rho_{\Pi} = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (26.1)$$

Продифференцируем по времени левую и правую части выражения (26.1) для случая неподвижной среды, когда частная производная по времени равна обыкновенной производ-

ной по времени ( $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$ ), меняя при этом операцию дифференцирования по времени и операцию нахождения дивергенции, получим

$$\frac{d\rho_{\Pi}}{dt} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (26.2)$$

В параграфе 14 мы получили закон сохранения электрического заряда, который в дифференциальной форме имеет следующий вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \vec{j}. \quad (26.3)$$

Запишем выражение (26.3) для случая поляризационных зарядов и токов

$$\frac{d\rho_{\Pi}}{dt} = -\operatorname{div} \vec{j}_{\Pi}. \quad (26.4)$$

Приравняем правые части выражений (26.3) и (26.4)

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}_{\Pi}. \quad (26.5)$$

Откуда следует

$$\vec{j}_{\Pi} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (26.6)$$

Величина, определяемая соотношением (26.6), называется вектором плотности поляризационного тока.

В технической электродинамике одним из основных уравнений является закон полного тока, который представляет из себя теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ , выводом из которой является факт относительно вихревого характера магнитного поля. Закон полного тока имеет следующий вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{макро}} + \vec{j}_{\text{см}} + \vec{j}_{\Pi}. \quad (26.7)$$

В выражении (26.7) слагаемое

$$\vec{j}_{\text{макро}} = \sigma \vec{E}. \quad (26.8)$$

понимается как закон Ома в дифференциальной форме.

Второе слагаемое в выражении (26.7) необходимо понимать как вектор плотности тока смещения, который определяется следующим выражением

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (26.9)$$

Третье слагаемое в выражении (26.7) представляет из себя понятие вектора плотности поляризационного тока.

Вектор электрического смещения имеет следующий вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (26.10)$$

Найдем частную производную от левой и правой частей (26.10) по времени

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

(26.11)

С учетом выражений (26.7), (26.9) и (26.10) из соотношения (26.8) получим

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (26.12)$$

С учетом выражения (26.11) выражение (26.12) принимает вид

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (26.13)$$

При расчете диаграммы направленности радиоантенны приходится учитывать действие внешних факторов, которые способны привести к дополнительному движению электрических зарядов в веществе. Такое движение будем называть сторонними токами. Вводя в рассмотрение объемную плот-

ность сторонних токов  $\vec{j}_{\text{стор}}$ , запишем выражение (26.13) в следующем виде

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{стор}}. \quad (26.14)$$

Выражение (26.14) представляет из себя полную форму записи закона полного тока.

### 27. Материальные уравнения для нелинейных сред.

Ранее мы рассмотрели понятия материальных уравнений для электрических и магнитных полей. Эти соотношения справедливы для случая линейных сред, когда величины напряженностей электрического и магнитного полей сравнительно невелики и когда справедливы принципы суперпозиции, как для электрического, так и для магнитного полей. На практике часто приходится сталкиваться с ситуациями, когда поля являются сильными и тогда принцип суперпозиции полей не является справедливым. Рассмотрим этот факт отдельно для электрического и магнитного полей.



### 1). Электрическое поле.

Ранее мы получили связь между векторами электрического смещения и напряженности электрического поля в следующем виде

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}. \quad (27.1)$$

Выражение (27.1) необходимо понимать в качестве материального уравнения для электрического поля. В данном выражении величина вектора  $\vec{D}$  понимается в виде вектора электрического смещения, а величина вектора  $\vec{E}$  понимается в виде вектора напряженности электрического поля. Коэффициент пропорциональности между ними  $\epsilon_a$  называется абсолютной диэлектрической проницаемостью среды, и который является скалярной величиной, т.е. числом.

Формула (27.1) имеет смысл в случае сравнительно слабых электрических полей, т.е. в случае так называемых линейных сред, для которых справедлив принцип суперпозиции.

В случае сравнительно сильных электрических полей связь между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  согласно выражения (27.1) становится несправедливой. В данном случае для векторов  $\vec{D}(D_x, D_y, D_z)$  и  $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$  справедливы следующие соотношения

$$\begin{cases} D_x = \epsilon_{axx} E_x + \epsilon_{axy} E_y + \epsilon_{axz} E_z \\ D_y = \epsilon_{ayx} E_x + \epsilon_{ayy} E_y + \epsilon_{ayz} E_z \\ D_z = \epsilon_{azx} E_x + \epsilon_{azy} E_y + \epsilon_{azz} E_z \end{cases} \quad (27.2)$$

Из анализа выражения (27.2) следует, что каждая из проекций вектора электрического смещения  $\vec{D}$  связана одновременно со всеми тремя проекциями вектора  $\vec{E}$ .

В правых частях этой системы при проекциях вектора  $\vec{E}$  находятся 9 коэффициентов, из которых можно составить квадратную матрицу третьего порядка, и которую назовем тензором

$$\leftrightarrow \epsilon_a = \begin{pmatrix} \epsilon_{axx} & \epsilon_{axy} & \epsilon_{axz} \\ \epsilon_{ayx} & \epsilon_{ayy} & \epsilon_{ayz} \\ \epsilon_{azx} & \epsilon_{azy} & \epsilon_{azz} \end{pmatrix}. \quad (27.3)$$

Выражение (27.3) представляет из себя понятие тензора абсолютной диэлектрической проницаемости среды.

Тензором называется оператор, с помощью которого производится преобразование одного вектора в другой, который будет иметь как другое направление, так и другое значение модуля.

## 2). Магнитное поле.

В данном случае связь между векторами магнитной индукции и напряженности для случая линейных сред имеет следующий вид

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (27.4)$$

Выражение (27.4) ранее нами было названо материальным уравнением для магнитного поля в среде. Данное выражение справедливо для случая линейных сред, когда величина

напряженности магнитного поля  $H < 100$  (А/м). Для более сильных полей магнитные среды перестают быть линейными и для них не выполняется принцип суперпозиции полей, т.е. не выполняется соотношение (27.4). В данном случае для

проекций векторов  $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$  и  $\vec{H}(H_x, H_y, H_z)$  справедливы следующие соотношения

$$\begin{cases} B_x = \mu_{axx} H_x + \mu_{axy} H_y + \mu_{axz} H_z \\ B_y = \mu_{ayx} H_x + \mu_{ayy} H_y + \mu_{ayz} H_z \\ B_z = \mu_{azx} H_x + \mu_{azy} H_y + \mu_{azz} H_z \end{cases} \quad (27.5)$$

Из коэффициентов в правых частях системы уравнений (27.5) составляем таблицу, которую назовем тензором

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu}_a = \begin{pmatrix} \mu_{axx} & \mu_{axy} & \mu_{axz} \\ \mu_{ayx} & \mu_{ayy} & \mu_{ayz} \\ \mu_{azx} & \mu_{azy} & \mu_{azz} \end{pmatrix} \quad (27.6)$$

Выражение (27.6) называется тензором абсолютной магнитной проницаемости среды.

Таким образом, введя понятие тензора абсолютной диэлектрической проницаемости среды материальное уравнение для электрического поля в случае нелинейной среды можно записать в следующем виде

$$\vec{D} = \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_a \vec{E}. \quad (27.7)$$

Что касается материального уравнения для магнитного поля в случае нелинейной среды, то можно записать следующее выражение

$$\vec{B} = \overset{\leftrightarrow}{\mu}_a \vec{E}. \quad (27.8)$$

**Нелинейными средами** называются среды, которые, во-первых, являются неоднородными, во-вторых, являются анизотропными, в-третьих, являются гиротропными и для которых не выполняется принцип суперпозиции электрических и магнитных полей.

**Неоднородными средами** называются среды, свойства которых в различных точках пространства различны.

**Изотропными средами** называются среды, свойства которых в различных направлениях одинаковы.

**Анизотропными средами** называются среды, свойства которых в различных направлениях различны.

**Гиротропными средами** называются среды, воздействие на которые внешнего магнитного поля способно приводить к вращению вектора плоскости поляризации магнитной волны.

Тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей обязательно должны учитываться при распространении электромагнитной волны в волноводе и резонаторе, заполненных магнитодиэлектриком. В случае взаимодействия электромагнитной волны с ионосферой (холодная плазма) обычно счи-

тается, что тензор абсолютной магнитной проницаемости  $\overset{\leftrightarrow}{\mu}_a = 1$ , что касается тензора абсолютной диэлектрической проницаемости  $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_a$ , то для случая не гиротропной плазмы используется следующее выражение

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (27.9)$$

В случае наличия магнитного поля, т.е. в случае гиротропной и замагниченной плазмы выражение для тензора диэлектрической проницаемости принимает вид

$$\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -j\varepsilon_2 & 0 \\ j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (27.10)$$

## Глава №2. Система уравнений Максвелла

### 1. Система уравнений Максвелла в интегральной форме.

После выдвижения гипотезы о существовании тока смещения, Максвелл на основе экспериментальных данных создал замкнутую систему уравнений, исходя из которой можно было объяснить не только все известные экспериментальные факты, но и в дальнейшем Максвеллом были предсказаны новые сведения, которые были позднее доказаны экспериментально. Например, из системы уравнений Максвелла следовало, что электромагнитное поле может существовать в виде электромагнитной волны. Этот факт в дальнейшем был обнаружен Генрихом Герцем.

Система уравнений Максвелла представляет из себя совокупность четырех уравнений, записываемых либо в интегральной, либо в дифференциальной формах. В курсе электродинамики эти уравнения формулируются в качестве теорем, доказательством которых является наличие экспериментально наблюдаемых фактов, следующих из данных теорем.

В интегральной форме система уравнений Максвелла может быть записана в виде следующих трех групп уравнений

#### 1 группа

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{\ell}) = \int_S \left( \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{стор}} \right) d\vec{s}, \quad (1.1)$$

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{\ell}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \right), \quad (1.2)$$

#### 2 группа

$$\int_s (\vec{D} d\vec{s}) = \int_V \rho dV, \quad (1.3)$$

$$\int_s (\vec{B} d\vec{s}) = 0, \quad (1.4)$$

### 3 группа

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (1.6)$$

Первые четыре уравнения (уравнения 1 и 2 группы) представляют из себя собственно уравнения Максвелла, причем в курсе физики отмечается, что порядок записи этих четырех уравнений является чисто произвольным на основании того, что они записываются для выяснения физического смысла каждого уравнения, с одной стороны и в порядке их получения с другой. В технической электродинамике этим уравнениям придается определенный порядок, а именно в первую группу входят основные по важности уравнения Максвелла, а именно (1.1) - закон полного тока, (1.2) - закон электромагнитной индукции, вторыми по важности являются уравнения составляющие вторую группу (1.3) - закон Гаусса для электрического поля, (1.4) - закон неразрывности магнитных силовых линий, третья группа включает материальные уравнения для магнитного и электрического полей, которые записываются для линейных сред через скалярные характеристики абсолютных диэлектрической и магнитной проницаемостей среды и через тензорные характеристики для нелинейных сред.

Система уравнений (1.1-1.6) во-первых, представляет из себя систему интегро-дифференциальных уравнений, которые

в общем, виде не решаются, во-вторых, даже для частных случаев приложений технической электродинамики они очень сложно решаются, и в данном случае приходится применять численное моделирование.

## 2. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Применяя теорему Остроградского-Гаусса и теорему Стокса к формулам (1.1-1.4), можно записать систему уравнений Максвелла в следующем виде в дифференциальном виде

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{стор}}, \quad (2.1)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (2.4)$$

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (2.6)$$

**Первая группа** уравнений в дифференциальной форме представляет из себя основные по важности уравнения Максвелла, а именно, уравнение (2.1) представляет из себя закон полного тока, уравнение (2.2) является математической записью закона электромагнитной индукции.

**Вторая группа** уравнений в дифференциальной форме представляет из себя совокупность уравнений второй степени важности, а именно, уравнение (2.3) представляет из себя закон Гаусса, а уравнение (2.4) – представляет закон неразрывности магнитных силовых линий.

**Третья группа** представляет из себя материальные уравнения среды, связывающие силовые характеристики электрического и магнитного полей.

Для получения полной информации об электромагнитном поле мы должны знать четыре его характеристики: векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  для электрического поля и векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  для магнитного поля. Поэтому, на практике система уравнений Максвелла решается только для двух характеристик электромагнитного поля. Во-первых, для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , во-вторых, для вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Остальные две характеристики, а именно вектор электрического смещения  $\vec{D}$  и вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  находятся на основе материальных уравнений среды.

### 3. Основная задача электродинамики.

Основной задачей электродинамики является задача определения характеристик электромагнитного поля в виде векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  по заданным распределениям зарядов и токов в системе. В общем, виде решение такой задачи не существует. Что касается частных случаев, то в технической электродинамике, такая задача решается, как правило, на основании системы уравнений Максвелла в дифференциальной форме для следующих четырех векторных характеристик электромагнитного поля

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y, z, t),$$

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}(x, y, z, t),$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(x, y, z, t),$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y, z, t).$$

В общем случае, как это следует из записанных выраже-



ний силовые характеристики электромагнитного поля являются функциями 4-х координат (трех пространственных и одной временной), поэтому решение конкретной задачи в общем, виде является затруднительным. Кроме упрощения решения задачи на основе использования материальных уравнений среды, в технической электродинамике также используются методы получения простейших видов решений. Дело в том, что на практике, как правило, рассматриваются только плоские гармонические электромагнитные волны. В данном случае для получения решений уравнений Максвелла в виде плоских электромагнитных волн можно использовать метод разложения Фурье, который в технической электродинамике известен под названием метода комплексных амплитуд.

При рассмотрении режимов работы лампы бегущей волны и лампы обратной волны, в качестве генераторов СВЧ колебаний, основная задача электродинамики заключается в том, что помимо трех групп уравнений (2.1-2.6) решается также уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле, которое записывается в следующем виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]. \quad (3.1)$$

#### 4. Метод комплексных амплитуд.

Ранее мы отметили, что силовые характеристики электрического и магнитного полей, зависят от трех пространственных и одной временной координат.

Так как на практике наиболее часто встречается случай распространения электромагнитной волны в виде плоской гармонической волны, то в данном случае можно перейти от задачи решения системы уравнений Максвелла для четырех координат к задаче нахождения новых характеристик электромагнитного поля, зависящих только от пространственных координат.

В технической электродинамике это осуществляется с помощью метода комплексных амплитуд.

Рассмотрим данный метод для произвольного векторного поля, описываемого следующим вектором

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(x, y, z, t). \quad (4.1)$$

Рассмотрим метод комплексных амплитуд для случая пространственного гармонического колебания, а когда встретиться случай волнового процесса, то запишем для него решение по аналогии. Для пространственного колебания вектора

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \text{ можно записать}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_{0x} \cos(\omega t + \varphi_{0x}) \cdot \vec{e}_x + A_{0y} \cos(\omega t + \varphi_{0y}) \cdot \vec{e}_y + A_{0z} \cos(\omega t + \varphi_{0z}) \cdot \vec{e}_z. \quad (4.2)$$

В выражении (4.2) величины  $A_{0x}$ ,  $A_{0y}$ ,  $A_{0z}$  называются физическими значениями составляющих амплитуды колебаний соответственно по осям OX, OY и OZ прямоугольной системы координат. Величины  $\varphi_{0x}$ ,  $\varphi_{0y}$ ,  $\varphi_{0z}$  называются начальными фазами составляющих колебания по осям OX, OY и OZ прямоугольной системы координат.

Для дальнейших вычислений учтем формулу Эйлера, имеющую следующий вид

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi. \quad (4.3)$$

Запишем понятие комплексного числа в следующем виде

$$Z = a + j b. \quad (4.4)$$

В выражении (4.4) величина ( $a$ ) называется действительной частью комплексного числа  $Z$ , величина ( $j b$ ) называется мнимой частью комплексного числа  $Z$ . На практике всегда оперируют понятиями действительных величин, поэтому после различных теоретических преобразований с комплексными выражениями, необходимо найти действительную часть от получающегося комплексного выражения. Для этого существует операция нахождения действительной части комплекс-

ного числа, которая в операторной форме записывается в следующем виде

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(a + jb) = a. \quad (4.5)$$

Согласно выражения (4.5) из формулы Эйлера (4.3) следует, что

$$\operatorname{Re}\{e^{j\varphi}\} = \operatorname{Re}\{\cos \varphi + j \sin \varphi\} = \cos \varphi. \quad (4.6)$$

Согласно (4.6) выражение (4.2) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) = & A_{0x} \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi_{0x})}\} \cdot \vec{e}_x + A_{0y} \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi_{0y})}\} \cdot \vec{e}_y + \\ & + A_{0z} \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \varphi_{0z})}\} \cdot \vec{e}_z, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где векторы  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  называются единичными векторами по осям OX, OY и OZ прямоугольной системы координат. Учитывая тот факт, что действительные величины можно вносить под знак операции действительного числа, далее запишем

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) = & \operatorname{Re}\left\{A_{0x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{0x})} \cdot \vec{e}_x\right\} + \operatorname{Re}\left\{A_{0y} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{0y})} \cdot \vec{e}_y\right\} + \\ & + \operatorname{Re}\left\{A_{0z} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{0z})}\right\} \cdot \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рассмотрим два комплексных числа

$$Z_1 = a_1 + jb_1,$$

$$Z_2 = a_2 + jb_2.$$

Сложим рассматриваемые комплексные числа

$$Z_1 + Z_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2.$$

Найдем действительную часть от суммы комплексных чисел

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{Z_1 + Z_2\} &= \operatorname{Re}\{a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2\} = \operatorname{Re}\{(a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)\} = \\ &= a_1 + a_2 = \operatorname{Re} Z_1 + \operatorname{Re} Z_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

На основании (4.9) можно заключить, что сумма действительных частей от комплексных чисел, равна действительной части от суммы комплексных чисел.

Согласно выражения (4.9) соотношение (4.8) можно преобразовать к следующему виду

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re}\left\{A_{0x} e^{j\omega t} e^{j\varphi_{0x}} \vec{e}_x + A_{0y} e^{j\omega t} e^{j\varphi_{0y}} \vec{e}_y + \right. \\ &\quad \left. + A_{0z} e^{j\omega t} e^{j\varphi_{0z}} \vec{e}_z\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (4.7) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re}\left\{\left(A_{0x} e^{j\varphi_{0x}} \vec{e}_x + A_{0y} e^{j\varphi_{0y}} \vec{e}_y + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. A_{0z} e^{j\varphi_{0z}} \vec{e}_z\right)e^{j\omega t}\right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Введем в рассмотрение следующую величину

$$\vec{\dot{A}}(\vec{r}) = A_{0x} e^{j\varphi_{0x}} \vec{e}_x + A_{0y} e^{j\varphi_{0y}} \vec{e}_y + A_{0z} e^{j\varphi_{0z}} \vec{e}_z. \quad (4.11)$$

Величину, определяемую согласно формулы (4.11), назовем комплексной амплитудой векторного поля. Точка над вектором в дальнейшем будет означать понятие комплексной амплитуды.

С учетом (4.11) выражение (4.10) примет вид

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{\dot{A}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\}. \quad (4.12)$$

Метод комплексных амплитуд заключается в том, что все характеристики электромагнитного поля, как скалярные, так и векторные, представляются в виде соотношения (4.12).

## 5. Система уравнений Максвелла в комплексной форме.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме, записанную в параграфе 2 следующим образом

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{стор}}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (5.4)$$

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (5.5)$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (5.6)$$

Согласно метода комплексных амплитуд для всех характеристик системы, как векторных, так и скалярных, можно записать следующие выражения

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{H}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\},$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{B}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\},$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\},$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{D}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\},$$

$$\vec{j}_{\text{ср}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{j}}_{\text{ср}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\},$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\rho}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \right\}.$$

Преобразуем к комплексному виду закон полного тока (5.1), записанной системы, а остальные уравнения системы Максвелла запишем по аналогии.

Применим метод комплексных амплитуд к левой части выражения (5.1)

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{rot Re} \left\{ \vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \text{rot} \left( \vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right) \right\} = \\
&= \text{Re} \left\{ e^{j\omega t} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

В выражении (5.7) мы учли, во-первых, тот факт, что операции вычисления ротора и вычисления действительной части можно менять местами, а во-вторых, тот факт, что операция ротора представляет из себя операцию вычисления частных производных по переменным  $x, y, z$ .

Применим метод комплексных амплитуд к слагаемым в правой части выражения (5.1)

$$\vec{\sigma E} = \sigma \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \sigma \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\}. \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{Re} \left\{ \vec{D}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{D}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right) \right\} = \\
&= \text{Re} \left\{ \vec{D}(\vec{r}) e^{j\omega t} j\omega \right\}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\vec{j}_{\text{стор}} = \text{Re} \left\{ \vec{j}(\vec{r})_{\text{стор}} e^{j\omega t} \right\}. \tag{5.10}$$

Подставляя полученные соотношения (5.7) - (5.10) в выражение (5.1), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t} \operatorname{rot} \vec{H} \left( \vec{r} \right) \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \sigma \vec{E} \left( \vec{r} \right) e^{j\omega t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \vec{D} \left( \vec{r} \right) e^{j\omega t} j\omega \right\} + \\ &+ \operatorname{Re} \left\{ \vec{j} \left( \vec{r} \right)_{\text{стоп}} e^{j\omega t} \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Переходя от суммы действительных частей комплексных выражений к действительной части от суммы комплексных выражений, далее запишем

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t} \operatorname{rot} \vec{H} \left( \vec{r} \right) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \left( \sigma \vec{E} \left( \vec{r} \right) + j\omega \vec{D} \left( \vec{r} \right) + \vec{j} \left( \vec{r} \right)_{\text{стоп}} \right) e^{j\omega t} \right\}. \quad (5.12)$$

Приравняем выражения под знаками действительных частей. Дело в том, что физический смысл имеют действительные части комплексных величин, поэтому на практике после всех операций над комплексными числами необходимо найти действительную часть от полученного выражения в комплексной форме. Таким образом, можно записать следующее выражение

$$e^{j\omega t} \operatorname{rot} \vec{H} = \left( \sigma \vec{E} \left( \vec{r} \right) + j\omega \vec{D} \left( \vec{r} \right) + \vec{j} \left( \vec{r} \right)_{\text{стоп}} \right) e^{j\omega t}$$

Сокращая на экспоненциальный сомножитель, далее получаем

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} \left( \vec{r} \right) + j\omega \vec{D} \left( \vec{r} \right) + \vec{j} \left( \vec{r} \right)_{\text{стоп}}. \quad (5.13)$$

Расчеты, которые были проведены при получении выражения (5.13), можно провести и для каждого из уравнений



системы Максвелла. Поэтому на основании выражения (5.13) запишем систему уравнений Максвелла в (5.1) – (5.6) следующем виде

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \vec{D} + \vec{j}_{\text{стор}},$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B},$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho,$$

$$\text{div } \vec{B} = 0,$$

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E},$$

$$\vec{B} = \epsilon_a \vec{H}.$$

Записанная система уравнений представляет из себя систему уравнений Максвелла в комплексной форме. Следует иметь в виду, что нестрогость приравнивания комплексных выражений в левых и правых частях выражения (5.12) снимается после всех преобразований в силу того, что в конечном результате характеристики электрического и магнитного полей будут вычисляться по следующим формулам метода комплексных амплитуд

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\},$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\}.$$

## 6. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Тангенс угла диэлектрических потерь.

Запишем систему уравнений Максвелла в комплексной форме, которая была получена в предыдущем параграфе

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \vec{D} + j \vec{j}_{\text{стор}}, \quad (6.1)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \quad (6.2)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (6.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (6.4)$$

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad (6.5)$$

$$\vec{B} = \epsilon_a \vec{H}. \quad (6.6)$$

Проведем преобразования каждого из уравнений системы уравнений Максвелла.

1. Из первого уравнения системы (6.1) следует

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon_a \vec{E} + j \vec{j}_{\text{стор}} = j\omega \vec{E} \left( \frac{\sigma}{j\omega} + \epsilon_a \right) + j \vec{j}_{\text{стор}} = \\ &= j\omega \vec{E} \left( -j \frac{\sigma}{\omega} + \epsilon_a \right) + j \vec{j}_{\text{стор}}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение первого уравнения системы (6.1) можно записать в следующем виде

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E} + j \vec{j}_{\text{стор}}. \quad (6.6)$$

В выражении (6.6) величина

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad (6.7)$$

называется комплексной диэлектрической проницаемостью среды.

2. Из второго уравнения системы (6.2) следует

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega\mu_a \vec{H}. \quad (6.8)$$

С учетом (6.6) и (6.8) система уравнений Максвелла (6.1) – (6.6) с учетом материальных уравнений для электрического и магнитного полей в комплексной форме принимает следующий вид

$$\text{rot} \vec{H} = j\omega\tilde{\epsilon}_a \vec{E} + \vec{j}_{\text{стор}}, \quad (6.9)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega\mu_a \vec{H}, \quad (6.10)$$

$$\text{div} \tilde{\epsilon}_a \vec{E} = \rho, \quad (6.11)$$

$$\text{div} \mu_a \vec{H} = 0. \quad (6.12)$$

Система уравнений (6.9) – (6.12) представляет из себя систему уравнений Максвелла, записанных для комплексных амплитуд, которая в дальнейшем будет нами использоваться при рассмотрении распространения плоской электромагнитной волны, как в свободном пространстве, так и в электродинамических структурах.

На основании сказанного сформулируем следующие выводы.

1). В случае отсутствия сторонних источников ( $\vec{j}_{\text{стор}} = 0$ ) заключаем, что роторные уравнения системы (6.9) и (6.10) очень похожи друг на друга, поэтому в дальнейшем

аналогично понятию  $\vec{j}_{\text{стор}}$  в уравнении (6.9), для уравнения (6.10) будет введено понятие вектора плотности магнитного тока, и в такой форме роторные уравнения будут использоваться в курсе "Антенны и устройства СВЧ" для расчета диаграммы направленности излучения радиоантенны.

2). Введение понятия комплексной диэлектрической проницаемости  $\tilde{\epsilon}_a$  согласно выражения (6.7) удобно тем, что эта

величина одновременно учитывает как поляризационные свойства среды ( $\epsilon_a$ ), так и проводящие свойства среды  $(-j\frac{\sigma}{\omega})$ . В технике СВЧ вместо понятия абсолютной диэлектрической проницаемости среды рассматривается понятие тангенса угла диэлектрических потерь. Получим для него выражение следующим образом. Изобразим комплексную диэлектрическую проницаемость на комплексной плоскости.

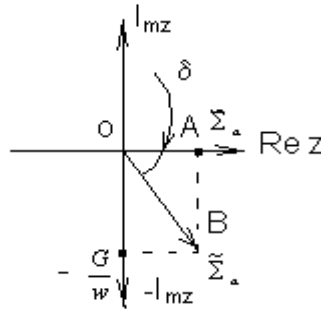


Рис. 2.1

Из  $\triangle ABO$  следует, что

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}. \quad (6.13)$$

Выражение (6.13) представляет из себя понятие тангенса угла диэлектрических потерь. Значение тангенса угла диэлектрических потерь в области СВЧ принимает значение  $10^{-4} \div 10^{-5}$ .

## 7. Вектор Умова-Пойтинга.

Выше мы отмечали, что электромагнитное поле может существовать только в виде электромагнитной волны, так как электромагнитное поле представляет из себя совокупность взаимосвязанных электрического и магнитного полей. В данном случае, говоря об электромагнитном поле, следует говорить и об его энергии, так как волновой процесс связан с пе-

реносом энергии волной.

Пусть имеется объем некоторого пространства  $V$ , ограниченного замкнутой поверхностью  $S$ . Потери энергии электромагнитной волной возможны за счет следующих эффектов:

1. Активные потери в виде джоулева нагрева ( $P_{\text{активн}}$ ).
2. Потери, связанные с движением зарядов за счет внешних источников ( $P_{\text{стор}}$ ).
3. Потери, связанные с уходом энергии за пределы объема ( $P_{\text{внешн}}$ ).

На основании сказанного можно записать следующее выражение для величины суммарных потерь в объеме пространства  $V$

$$P_{\text{полн}} = P_{\text{активн}} + P_{\text{стор}} + P_{\text{внешн}}. \quad (7.1)$$

Учитывая, что величина  $\frac{dW}{dt}$  в курсе физики называется мощностью потерь энергии, где  $W$  – энергия электромагнитного поля, составим следующее балансовое уравнение потерь энергии

$$-\frac{dW}{dt} = P_{\text{стор}} + P_{\text{активн}} + P_{\text{внешн}}. \quad (7.2)$$

Пусть в объеме  $V$ , во-первых, отсутствуют активные потери ( $P_{\text{активн}} = 0$ ), во-вторых, отсутствуют потери за счет сторонних источников ( $P_{\text{стор}} = 0$ ). Таким образом, все потери энергии обуславливаются уносом электромагнитной энергии за пределы объема  $V$  в виде ее излучения. В данном случае выражение (7.2) примет следующий вид

$$-\frac{dW}{dt} = P_{\text{внешн}}. \quad (7.3)$$

В курсе электродинамики выводится следующее соотношение для мощности потерь электромагнитной энергии в случае излучения ее за пределы объема

$$P_{\text{ВНЕШН}} = \oint_s \left( \vec{\Pi} d\vec{s} \right). \quad (7.4)$$

В выражении (7.4) величина

$$\vec{\Pi} = \left[ \vec{E} \vec{H} \right]. \quad (7.5)$$

называется вектором Умова-Пойтинга. Векторы  $\vec{\Pi}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  при этом образуют правую тройку векторов, как это показано на рис. 2.2.

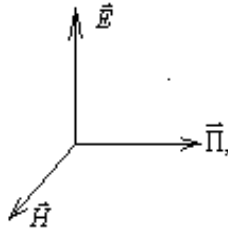


Рис. 2.2

Вектор Умова-Пойтинга характеризует направление, в котором происходит излучение (распространение электромагнитной энергии), физически он характеризует мгновенную мощность излучаемой электромагнитной энергии и численно, равен величине энергии излучаемой системой за единицу времени и с единицы поверхности площадки, перпендикулярной к направлению излучения.

## 8. Основные характеристики гармонического волнового процесса.

Так как электромагнитные волны в отличие от упругих (звуковых) волн могут распространяться не только в среде, но и в вакууме, следует ожидать, что механизм распространения электромагнитных волн является более сложным, чем механизм распространения упругих волн. Следовательно, и теория электромагнитных волн является более сложной, чем теория упругих волн. Рассмотрим основные характеристики волнового процесса применительно к случаю распространения уп-

ругой одномерной гармонической волны.

В курсе физики формулируется понятие уравнения одномерной гармонической волны в следующем виде

$$S(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (8.1)$$

На основании выражения (8.1) рассмотрим основные характеристики волнового процесса.

1. В выражении (8.1) величина  $S(x, t)$  называется величиной смещения частиц среды относительно положения равновесия. По направлению смещения частиц среды относительно направления распространения волны разделяются на два типа.

**Продольными волнами** называются волны, когда частицы среды совершают колебания вдоль направления распространения волны.

**Поперечными волнами** называются волны, когда частицы среды совершают колебания в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны.

Из приведенных определений продольных и поперечных волн следует, что теория поперечных волн является более сложной, чем теория продольных волн, так как в случае поперечных волн помимо движения частиц в поперечном направлении следует рассматривать и процесс распространения волны в продольном направлении.

2. Величина аргумента функции косинуса в выражении (8.1)

$$\Phi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_0 \quad (8.2)$$

называется фазой волны.

А величина

$$\varphi_0 = \Phi(x = 0, t = 0). \quad (8.3)$$

в выражении называется начальной фазой колебательного процесса.

3. Остальные характеристики волнового процесса рассмотрим с помощью графика, при этом необходимо иметь в виду, что согласно (8.1) величина смещения точки среды яв-

ляется функцией двух переменных. Следовательно, все возможные смещения точки среды в общем случае будут образовывать некоторую поверхность, поэтому при рассмотрении чертежа на плоскости, мы будем фиксировать либо величину времени  $t$ , либо координату  $x$ .

**а).** Зафиксируем координату ( $x = \text{const}$ ). В данном случае мы рассматриваем смещение частиц среды в различные моменты времени, но в одной и той же точке пространства. Данный факт приведен на рис.2.3.

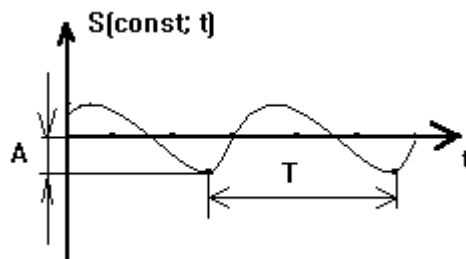


Рис.2.3

1. Величина  $A$ , изображенная на рисунке, называется амплитудой волны. Она определяет величину максимального смещения частиц среды от положения равновесия.

2. Величина  $T$ , изображенная на рисунке, определяет понятие периода колебательного процесса и характеризует время одного полного колебания.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

3. Величина  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  называется циклической или круговой частотой волнового процесса. Она характеризует число колебаний системы за время  $2\pi$  секунд.

**б).** Зафиксируем время  $t$ , т.е. будем рассматривать мгновенную фотографию смещения частиц среды от положения равновесия в различных точках пространства. Данный факт приведен на рис.2.4.

1. Величина  $\lambda$ , изображенная на рисунке, называется длиной волны. Данная величина в курсе физики определяется следующим образом.

**Во-первых**, она равна расстоянию, на которое распро-



страняется волна за время равное периоду колебаний.

**Во-вторых**, она равна ближайшему расстоянию между точками среды, совершающими колебания в одной фазе.

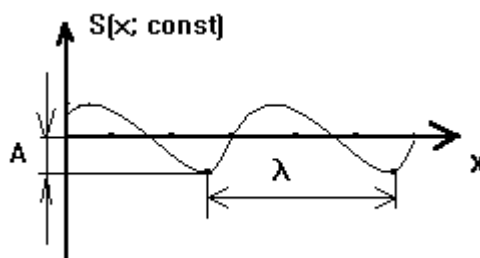


Рис. 2.4

## 2. Величина

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8.4)$$

называется волновым числом и которая характеризует число длин волн, укладываемых на расстоянии в  $2\pi$  метра. В технической электродинамике иногда величину  $k$  называют коэффициентом фазы.

Выражение (8.1) в случае рассмотрения распространения электромагнитной волны в пространстве записывается в следующем виде

$$S(\vec{r}, t) = S(x, y, z; t) = A \cos\left(\omega t - (\vec{k} \vec{r}) + \varphi_0\right). \quad (8.5)$$

В выражении (8.5) вектор  $\vec{k}$  называется волновым вектором, модуль которого равен волновому числу, а направление, которого совпадает с направлением распространения волны.

## 9. Фронт волны. Фазовая скорость волны.

Рассмотрим распространение одномерной бегущей гармонической волны в пространстве. Уравнение такой волны, как было отмечено ранее имеет следующий вид

$$S(x, t) = A \cos \left( \omega t - \left( \vec{k} \vec{r} \right) + \varphi_0 \right). \quad (9.1)$$

Введем в рассмотрение следующие два определения

**Волновой поверхностью** называется геометрическое место точек, характеризующихся одинаковым значением фазы.

**Фронтом волны** называется волновая поверхность, которая разделяет область пространства на две части в одной из них колебательный процесс уже существует в другой он еще не начинался.

Фронт волны может иметь различный вид: плоский, цилиндрический, сферический и т.д. При распространении радиоволн на значительные расстояния, фронт реальной сферической волны на больших расстояниях от источника будет иметь вид плоскости.

На основании определения фронта волны, запишем его уравнение в следующем виде

$$\Phi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}. \quad (9.2)$$

Выразим из выражения (9.2) координату  $x$ , характеризующую местоположение фронта волны в пространстве

$$x = \frac{\omega t + \varphi_0 - \text{const}}{k}. \quad (9.3)$$

Продифференцируем левую и правую части выражения (9.3) по времени  $t$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega t + \varphi_0 - \text{const}}{k} \right) = \frac{1}{k} (\omega + 0 - 0) = \frac{\omega}{k}. \quad (9.4)$$

По определению быстрота изменения координаты характеризует понятие скорости, которую обозначим следующим образом

$$v_{\phi} = \frac{dx}{dt}. \quad (9.5)$$

Согласно выражения (9.5) соотношение (9.4) можно запи-

сать в следующем виде

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}. \quad (9.6)$$

В дальнейшем выражение (9.6) будем понимать в качестве фазовой скорости волнового процесса. Физический смысл понятия фазовой скорости понимается в виде скорости движения фронта волны.

Найдем значение фазовой скорости гармонической одномерной бегущей волны. По определению циклической частоты можно записать:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (9.7)$$

В выражении (9.7) величина  $\nu = \frac{1}{T}$  называется линейной частотой. С другой стороны волновое число  $k$  можно представить в следующем виде

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\nu T} = \frac{2\pi}{v}. \quad (9.8)$$

Из выражения (9.6) с учетом соотношений (9.7) и (9.8) получаем

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{v}} = v.$$

Таким образом, можно записать, что

$$v_{\phi} = v. \quad (9.9)$$

Фазовая скорость гармонической волны равна скорости распространения волны.

С понятием фазовой скорости волны тесно связано понятие дисперсии волн.

**Дисперсией волн** называется физическое явление, связанное с зависимостью фазовой скорости волны от ее частоты или длины волны

$$v_{\phi} = f(\lambda) = \phi(v_{\phi}). \quad (9.10)$$

Выражение (9.10) определяет математическую формулировку условия дисперсии волн.

### 10. Затухание волн. Коэффициент распространения волн.

В курсе физики при рассмотрении затухающих колебаний получается следующее выражение для величины смещения колебательной системы в направлении оси ОХ

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi_0). \quad (10.1)$$

В выражении (10.1) величина

$$A_{\text{зат}}(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (10.2)$$

называется амплитудой затухающих колебаний. Величина  $\beta$  называется коэффициентом затухания, она характеризует время, в течение которого амплитуда затухающих колебаний убывает в  $e$  раз.

Для случая волнового процесса в упругой среде аналогично выражения (10.1) можно записать

$$S(x, t) = A_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx + \phi_0). \quad (10.3)$$

Выражение (10.3) можно рассматривать в качестве закона изменения смещения частиц среды от положения равновесия. В данном случае величина

$$A_{\text{зат}}(t) = A_0 e^{-\gamma x}. \quad (10.4)$$

называется амплитудой затухающей волны и которая характеризует закон изменения амплитуды смещения частиц среды от положения равновесия. Величина  $\gamma$  называется коэффициентом ослабления волны или коэффициентом распространения волны.

Запишем выражение (10.3) в комплексной форме для слу-

чая, когда начальная фаза  $\varphi_0 = 0$ . В результате выражение (10.3) примет вид

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx). \quad (10.5)$$

Запишем формулу Эйлера для аргумента функции косинуса в выражении (10.5)

$$e^{j(\omega t - kx)} = \cos(\omega t - kx) + j \sin(\omega t - kx). \quad (10.6)$$

Найдем действительную часть от левой и правой частей выражения (10.6)

$$\operatorname{Re}\{e^{j(\omega t - kx)}\} = \operatorname{Re}\{\cos(\omega t - kx) + j \sin(\omega t - kx)\} = \cos(\omega t - kx). \quad (10.7)$$

С учетом выражения (10.7) соотношение (10.3) принимает вид

$$\begin{aligned} S(x, t) &= A_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx) = A_0 e^{-\gamma x} \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t - kx)}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{A_0 e^{-\gamma x} e^{j(\omega t - kx)}\} = \\ &= \operatorname{Re}\{A_0 e^{-\gamma x} e^{-jkx} e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{A_0 e^{-(\gamma + jk)x} e^{j\omega t}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$S(x, t) = \operatorname{Re}\{A_0 e^{-(\gamma + jk)x} e^{j\omega t}\}. \quad (10.8)$$

На основе метода комплексных амплитуд для выражения в фигурных скобках выражения (10.8) можно записать

$$A_0 e^{-(\gamma + jk)x} = \dot{A}(x). \quad (10.9)$$

Выражение (10.9) будем понимать в качестве понятия комплексной амплитуды волны. С учетом данного выражения соотношение (10.8) принимает вид

$$S(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{\vec{A}}(x) e^{j\omega t} \right\}. \quad (10.11)$$

Выражение (10.11) необходимо понимать в качестве закона изменения смещения в комплексной форме.

В выражении (10.3) величина  $\gamma$  называется коэффициентом ослабления волны и эта величина является комплексной величиной, поэтому запишем для этой величины следующее выражение

$$\alpha = \gamma + jk. \quad (10.12)$$

Рассмотрим следующие случаи для величины  $\gamma$ .

1.  $\gamma = 0$ . В данном случае из выражения (10.12) получаем, что  $\alpha = jk$ , поэтому заключаем, что коэффициент распространения является чисто мнимым. Это означает, что волновой процесс существует без процесса затухания (ослабления).

2.  $k = 0$ . В данном случае из выражения (10.12) получаем, что,  $\alpha = \gamma$ . Что касается фазы волны, то можно записать, что  $\Phi(x, t) = \omega t - kx = \omega t$ . Этот факт означает, что фаза волны в различных точках пространства одинакова, так как нет зависимости от координаты. Следовательно, заключаем, что как такового волнового процесса не существует.

#### 11. Уравнение Гельмгольца.

Запишем систему уравнений Максвелла в комплексной форме, полученную в параграфе 6

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \epsilon_a \vec{E} + \vec{j}_{\text{СТОП}}, \quad (11.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \quad (11.2)$$

$$\operatorname{div} \epsilon_a \vec{E} = \rho, \quad (11.3)$$

$$\operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0. \quad (11.4)$$

Рассмотрим случай, когда электромагнитные волны распространяются в среде, где отсутствуют свободные заряды,

т.е.  $\vec{\rho} = 0$ , а также отсутствуют сторонние токи, т.е.  $\vec{j}_{\text{стор}} = 0$ . В данном случае система уравнений Максвелла с учетом материальных уравнений принимает следующий вид

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}, \quad (11.5)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}, \quad (11.6)$$

$$\text{div } \tilde{\epsilon}_a \vec{E} = 0, \quad (11.7)$$

$$\text{div } \mu_a \vec{H} = 0. \quad (11.8)$$

Мы рассматриваем случай распространения электромагнитных волн в линейной среде, когда  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  являются скалярными величинами. В данном случае, их можно вынести за знак операции вычисления дивергенции в выражениях (11.7) и (11.8). Тогда получаем

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}, \quad (11.9)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}, \quad (11.10)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (11.11)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (11.12)$$

**1.** Получим волновое уравнение для комплексной амплитуды электрического поля. Для чего вычислим операцию ротора от левой и правой частей уравнения (11.10)

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot}(-j \omega \mu_a \vec{H}) = -j \omega \mu_a \text{rot } \vec{H}. \quad (11.13)$$

С учетом выражения (11.9) соотношение (11.13) примет вид

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= -j \omega \mu_a (j \omega \tilde{\varepsilon}_a \vec{E}) = -j \times j \omega^2 \tilde{\varepsilon}_a \mu_a \vec{E} = \\ &= -(-1) \times \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \vec{E}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно выражение (11.13) принимает вид

$$\text{rot rot } \vec{E} = \omega^2 \tilde{\varepsilon}_a \mu_a \vec{E}. \quad (11.14)$$

Преобразуем левую часть (11.14)

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{rot} \left[ \vec{\nabla} \vec{E} \right] = \left[ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \vec{E} \right] \right] = \vec{b}(\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b}). \quad (11.15)$$

Правая часть соотношения (11.15) в теоретической физике носит название (правила бац минус цаб). С учетом этого правила соотношение (11.15) в окончательной форме примет вид

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= \left[ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \vec{E} \right] \right] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \vec{\nabla}) = \\ &= \vec{\nabla}(\text{div } \vec{E}) - \vec{E} \nabla^2 = \vec{\nabla} 0 - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}. \end{aligned} \quad (11.16)$$

С учетом (11.16) соотношение (11.14) принимает вид



$$\nabla^2 \vec{\dot{E}} + \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a \vec{\dot{E}} = 0. \quad (11.17)$$

Выражение (11.17) в технической электродинамике называется уравнением Гельмгольца.

В курсе физики подобное уравнение называется волновым уравнением. Это уравнение для комплексных амплитуд называется уравнением Гельмгольца в честь немецкого физика, впервые его получившего.

Введем в рассмотрение следующую величину

$$\lambda^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a. \quad (11.18)$$

С учетом (11.18) уравнение (11.17) принимает следующий вид

$$\nabla^2 \vec{\dot{E}} - \lambda^2 \vec{\dot{E}} = 0. \quad (11.19)$$

В технической электродинамике уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды вектора напряженности электри-

ческого поля  $\vec{\dot{E}}$  решается именно в виде уравнения (11.19).

2. Аналогично предыдущему пункту данного параграфа вычислим операцию ротора от левой и правой частей (11.9), а затем, используя уравнение (11.10) и правило (11.16), можно получить следующее уравнение

$$\nabla^2 \vec{\dot{H}} - \lambda^2 \vec{\dot{H}} = 0. \quad (11.20)$$

В уравнении (11.20) введено следующее обозначение

$$\lambda^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a.$$

Для того чтобы получить характеристики электромагнитного поля необходимо решить дифференциальные уравнения (11.19) и (11.20), а затем воспользоваться материальными уравнениями среды.

## 12. Дифференциальное уравнение для плоской электромагнитной волны.

Ранее рассматривая упругие колебания, мы ввели понятие плоской упругой волны, когда фронт волны имеет вид плоскости. Покажем, что решение системы уравнений Максвелла для электромагнитного поля в случае отсутствия свободных зарядов и сторонних токов дает в результате процесс распространения плоской электромагнитной волны в безграничном пространстве.

Рассмотрим ранее полученное уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля

$$\nabla^2 \vec{E} - \lambda^2 \vec{E} = 0. \quad (12.1)$$

Ранее мы отметили, что уравнение (12.1) в технической электродинамике называется уравнением Гельмгольца. В данном уравнении величина  $\lambda^2$  определяется соотношением

$$\lambda^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a. \quad (12.2)$$

А величина

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (12.3)$$

называется оператором Лапласа.

С учетом (12.3) выражение (12.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \lambda^2 \vec{E} = 0. \quad (12.4)$$

Спроектируем векторное уравнение (12.4) на оси координат

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - \lambda^2 \dot{E}_x = 0, \quad (12.5)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} - \lambda^2 \dot{E}_y = 0, \quad (12.6)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} - \lambda^2 \dot{E}_z = 0. \quad (12.7)$$

Для того чтобы найти характеристики электрического поля электромагнитной волны необходимо решить полученную систему трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (12.5) – (12.7).

В общем случае этот процесс является довольно трудоемким и его решение на основе раздела математики "Уравнения математической физики" получается в виде довольно сложной функции от координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Решим эту систему для случая, когда волна распространяется, во-первых, вдоль направления оси  $OZ$ , а во-вторых, вектор комплексной ам-

плитуды  $\vec{E}$  имеет только составляющую по оси  $OX$  прямоугольной системы координат, выполняется следующее соотношение

$$\dot{E}_y = \dot{E}_z = 0. \quad (12.8)$$

Кроме того, будем считать, что составляющие вектора комплексной амплитуды не зависят от координат  $x$  и  $y$ , что соответствует условию

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (12.9)$$

С учетом (12.8) и (12.9) система уравнений (12.5) – (12.7) примет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - \lambda^2 \dot{E}_x = 0. \quad (12.10)$$

На основании (12.9) отметим, что комплексная амплитуда  $\dot{E}_x$  является функцией только от переменной  $z$ , ( $\dot{E}_x = f(z)$ ). Следовательно, частная производная второго порядка по переменной  $z$  в уравнении (12.10) может быть заменена обыкновенной производной второго порядка по переменной  $z$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{d^2}{dz^2}. \quad (12.11)$$

С учетом соотношения (12.11) выражение (12.10) принимает следующий вид

$$\frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} - \lambda^2 \dot{E}_x = 0. \quad (12.12)$$

Уравнение (12.12) называется дифференциальным уравнением плоской электромагнитной волны.

### 13. Уравнение плоской электромагнитной волны.

Как было отмечено выше мы рассматриваем распространение электромагнитной волны в направлении оси  $OZ$  и считаем, что характеристики электромагнитной волны зависят только от координаты  $z$  и не зависят от координат  $x$  и  $y$ . Это позволяет с одной стороны перейти от частных производных к обыкновенным, а с другой стороны мы полагаем, что вектор  $\vec{E}$  имеет только  $x$ -овую составляющую, а, следовательно, и комплексная амплитуда  $\vec{\dot{E}}$  имеет только проекцию по оси  $OX$ . В предыдущем параграфе нами было получено дифференциальное уравнение для плоской электромагнитной волны в следующем виде

$$\frac{d^2 \dot{E}_x(z)}{dz^2} - \lambda^2 \dot{E}_x(z) = 0. \quad (13.1)$$

В уравнении (13.1) введем в рассмотрение следующую величину

$$\delta^2 = -\lambda^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a. \quad (13.2)$$

С учетом соотношения (13.2) выражение (13.1) принимает вид

$$\frac{d^2 \dot{E}_x(z)}{dz^2} + \delta^2 \dot{E}_x(z) = 0. \quad (13.3)$$

Уравнение (13.3) представляет из себя однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его частные решения ищем в виде

$$\dot{E}_x(z) = e^{\delta z}. \quad (13.4)$$

Если выражение (13.4) является решением уравнения (13.3), то при его подстановке в выражение (13.3) получится тождество. Для того чтобы это показать, вычислим первую и вторую производные от выражения (13.4)

$$1. \quad \frac{d}{dz} e^{\delta z} = e^{\delta z} \frac{d}{dz}(\delta z) = e^{\delta z} \delta. \quad (13.5)$$

$$2. \quad \frac{d^2}{dz^2} e^{\delta z} = \frac{d}{dz} \left( \frac{d}{dz} e^{\delta z} \right) = \frac{d}{dz} (e^{\delta z} \delta) = \delta^2 e^{\delta z}. \quad (13.6)$$

Подставляя выражения (13.5) и (13.6) в уравнение Гельмгольца (13.3), далее получаем

$$\delta^2 e^{\delta z} - \lambda^2 e^{\delta z} = 0.$$

Откуда получаем

$$\delta = \pm \lambda. \quad (13.7)$$

На основании (13.3) и (13.7) заключаем, что уравнение Гельмгольца имеет два частных решения

$$\begin{cases} \dot{E}_{x1}(z) = e^{\lambda z}, \\ \dot{E}_{x2}(z) = e^{-\lambda z}. \end{cases} \quad (13.8)$$

В курсе высшей математики показывается, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка равно линейной комбинации двух его частных решений, следовательно, можно записать

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_1 \dot{E}_{x1}(z) + \dot{E}_2 \dot{E}_{x2}(z) \quad (13.9)$$

Выражение (13.9) называется общим решением дифференциального уравнения (13.1). Здесь величины  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  называются коэффициентами линейной комбинации.

С учетом (13.8) соотношение (13.9) примет вид

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_1 e^{\lambda z} + \dot{E}_2 e^{-\lambda z}. \quad (13.10)$$

Согласно параграфа 10 запишем выражение для коэффициента распространения волны в виде

$$\lambda = \gamma + jk. \quad (13.11).$$

С учетом выражения (13.11) соотношение (13.10) принимает следующий вид

$$\dot{E}_x(z) = \dot{E}_1 \cdot e^{(\gamma+jk)z} + \dot{E}_2 \cdot e^{-(\gamma+jk)z}. \quad (13.12)$$

Выражение (13.12) представляет из себя уравнение плоской электромагнитной волны.

На основании сказанного сформулируем следующие выводы.

**1.** Наличие координаты  $z$  в экспоненциальных множителях выражения (13.12) говорит о том, что электромагнитная волна распространяется вдоль направления оси  $OZ$ .

2. Уравнение плоской электромагнитной волны складывается из двух составляющих, которые представляют из себя две независимо распространяющиеся волны, никак не связанные между собой, так как они представляют частные решения дифференциальных уравнений.

3. Первое слагаемое в (13.12) отвечает за наличие волны, распространяющейся в сторону уменьшения координаты оси OZ (в отрицательном направлении оси OZ).

4. Второе слагаемое в (13.12) отвечает за распространение волны в сторону увеличения координаты оси OZ (в положительном направлении оси OZ).

#### 14. Закон изменения вектора напряженности магнитного поля плоской электромагнитной волны.

Для того чтобы получить решение для комплексной амплитуды вектора напряженности магнитного поля надо аналогично предыдущего параграфа решить дифференциальное

уравнение для вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  для случая плоской электромагнитной волны. Это означает, что нам необходимо решить дифференциальное уравнение

для комплексной амплитуды  $\vec{H}$  в следующем виде

$$\nabla^2 \vec{H} - \lambda^2 \vec{H} = 0, \quad (14.1)$$

где величина  $\lambda$  определяется следующим выражением

$$\lambda^2 = -\omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_a. \quad (14.2)$$

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение (14.1) мы должны сделать некоторые предположения, суть которых нам не известна, эту неизвестность мы разрешим с помощью системы уравнений Максвелла, полученную нами ранее в комплексной форме

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_a \vec{E}, \quad (14.3)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_a \vec{H}, \quad (14.4)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (14.5)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (14.6)$$

Получим закон изменения вектора  $\vec{H}$  магнитного поля для случая, когда электрическая составляющая электромагнитного поля представляет из себя бегущую волну, распространяющуюся в сторону увеличения координаты оси OZ. В данном случае для комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля, имеющей только составляющую по оси OX, можно записать

$$\vec{E} = \dot{E}_x(z) \cdot \vec{e}_x = \dot{E}_x e^{-(\gamma+jk)z} \cdot \vec{e}_x = \dot{E} e^{-\lambda z} \cdot \vec{e}_x. \quad (14.7)$$

Из второго уравнения системы (14.4) следует, что

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \text{rot } \vec{E} = \frac{j}{\omega\mu_a} \text{rot } \vec{E}. \quad (14.8)$$

Учтем определение ротора векторной функции через определитель третьего порядка



$$\begin{aligned}\vec{\dot{H}} &= \frac{j}{\omega\mu_a} \operatorname{rot} \vec{\dot{E}} = \frac{j}{\omega\mu_a} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = \frac{j}{\omega\mu_a} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{j}{\omega\mu_a} \left( \vec{e}_y \cdot \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \right) = \frac{j}{\omega\mu_a} \cdot \frac{\partial \vec{\dot{E}}_x}{\partial z} \cdot \vec{e}_y.\end{aligned}$$

Таким образом, можно окончательно записать

$$\vec{\dot{H}} = \frac{j}{\omega\mu_a} \cdot \frac{\partial \vec{\dot{E}}_x}{\partial z} \cdot \vec{e}_y. \quad (14.9)$$

Найдем величину частной производной в выражении (14.9)

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = \frac{\partial \dot{E}_x(z)}{\partial z} = \frac{d}{dz} \left( \dot{E} e^{-\lambda z} \right) = -\lambda \dot{E} e^{-\lambda z}. \quad (14.10)$$

Подставляя (14.10) в выражение (14.9), получаем

$$\vec{\dot{H}} = \frac{j}{\omega\mu_a} \left( -\lambda \dot{E} e^{-\lambda z} \right) \vec{e}_y = -\frac{j\lambda}{\omega\mu_a} \dot{E} e^{-\lambda z} \vec{e}_y. \quad (14.11)$$

Учтем, что величина  $\lambda$  в выражении (14.11) определяется следующим выражением

$$\lambda = j\omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a}. \quad (14.12)$$

С учетом выражения (14.12) соотношение (14.11) принимает вид

$$\vec{\dot{H}} = -\frac{j \cdot j \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a} \mu_a}{\omega \mu_a} \vec{\dot{E}} e^{-\lambda z} \vec{e}_y. \quad (14.13)$$

Проводя необходимые вычисления, окончательно получаем

$$\vec{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}} \vec{\dot{E}} e^{-\lambda z} \vec{e}_y. \quad (14.14)$$

Выражение (14.14) представляет собой закон изменения вектора напряженности магнитного поля электромагнитной волны.

На основании сказанного можно сделать следующие выводы.

1. Сомножитель  $e^{-\lambda z}$  в выражении означает, что магнитное поле электромагнитной волны распространяется в направлении оси OZ.

2. Наличие единичного вектора  $\vec{e}_y$  означает, что вектор напряженности магнитного поля имеет только составляющую в направлении оси OY.

3. Так как электрическое поле имеет составляющую вектора  $\vec{E}$  только в направлении OX, а вектор  $\vec{\dot{H}}$  только в направлении оси OY, то заключаем, что рассматриваемая плоская электромагнитная волна является поперечной. Этот факт изобразим с помощью следующего рисунка 2.5. На рисунке плоская электромагнитная волна распространяется вдоль направления оси OZ. Вектор напряженности электрического поля совершает колебания вдоль оси OX. Вектор напряженности магнитного поля совершает колебания в направлении оси OY.

Согласно рисунка заключаем, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{\dot{H}}$  составляют правую тройку векторов с направлением распространения электромагнитной волны. Этот факт позволяет ввести в рассмотрение следующую векторную величину

$$\vec{\Pi} = \left[ \vec{E} \vec{H} \right]. \quad (14.13)$$

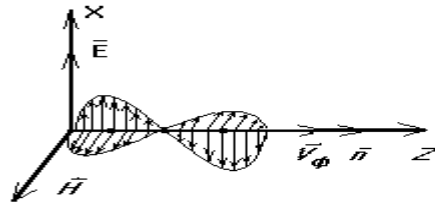


Рис. 2.5

Выражение (14.13) представляет из себя понятие вектора Умова-Пойтинга. Данная величина в технической электродинамике используется для рассмотрения вопросов распространения энергии электромагнитной волны.

### 15. Характеристическое сопротивление.

Запишем выражение для комплексной амплитуды вектора напряженности магнитного поля, которое было получено в предыдущем параграфе в следующем виде

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}} \vec{E} e^{-\lambda z} \cdot \vec{e}_y. \quad (15.1)$$

В данном выражении величина комплексной амплитуды электрического поля  $\vec{E}$  имеет следующий вид

$$\vec{E} = \vec{E} e^{-\lambda z} \cdot \vec{e}_x. \quad (15.2)$$

Из (15.1) с учетом выражения (15.2) следует

$$\dot{H}_y = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}} \dot{E} \cdot e^{-\lambda z}. \quad (15.3)$$

Выражение (15.3) назовем законом изменения комплексной амплитуды магнитного поля плоской электромагнитной волны.

Преобразуем выражение (15.3). Из соотношения (15.2) следует

$$\dot{E}_x = \dot{E} \cdot e^{-\lambda z}. \quad (15.4)$$

Поделим левые и правые части выражений (15.3) и (15.4)

$$\frac{\dot{H}_y}{\dot{E}_x} = \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}} \dot{E} e^{-\lambda z}}{\dot{E} e^{-\lambda z}} = \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}_a}{\mu_a}}. \quad (15.5)$$

Введем в рассмотрение понятие характеристического сопротивления, определяемого следующим выражением

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_a}}. \quad (15.6)$$

С учетом (15.6) выражение (15.5) принимает вид

$$\frac{\dot{H}_y}{\dot{E}_x} = \frac{1}{Z_c}. \quad (15.7)$$

Из выражения (15.7) получаем следующее выражение для комплексной амплитуды вектора напряженности магнитного поля

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_x}{Z_c}. \quad (15.8)$$

Физический смысл характеристического сопротивления  $Z_c$  заключается в том, что если при решении системы уравнений Максвелла на основе уравнения Гельмгольца получается выражение для комплексной амплитуды электрического поля  $\dot{E}_x$ , то посредством выражения (15.8), если известно ха-

ракетистическое сопротивление  $Z_c$  передающей линии, может быть найдена величина комплексной амплитуды магнитного поля  $\dot{H}_y$ .

Проанализируем величину ракетистического сопротивления для наиболее часто встречающихся случаев.

1. Средой является вакуум. В данном случае можно записать следующие значения характеристик рассматриваемой среды

$$\epsilon_{\text{ВАК}} = 1, \mu_{\text{ВАК}} = 1, \sigma = 0.$$

Выражение для абсолютной магнитной проницаемости среды имеет следующий вид

$$\mu_a = \mu_0 \mu. \quad (15.9)$$

Ранее было получено выражение для комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости среды в следующем виде

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad (15.10)$$

В выражении (15.10) величина

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon. \quad (15.11)$$

называется абсолютной диэлектрической проницаемостью среды.

Из выражения (15.6) с учетом (15.9) - (15.11) получаем для ракетистического сопротивления среды следующее значение

$$\begin{aligned} Z_c &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a - j \frac{0}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0 \times 1}{\epsilon_0 \times 1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi = 377 \text{ О} \end{aligned}$$

м.

Таким образом, можно записать

$$(Z_c)_{\text{ВАК}} = 120 \pi = 377 \text{ Ом.} \quad (15.12)$$

Выражение (15.12) представляет в технической электродинамике понятие характеристического сопротивления передающей линии в вакууме.

2. Рассмотрим случай магнитоэлектрика без потерь. Характеристики среды в данном случае будут иметь следующие значения

$$\varepsilon > 1, \quad \mu > 1, \quad \sigma = 0.$$

При данных значениях параметров из (15.6) получаем

$$\begin{aligned} Z_c &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a - j \frac{0}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \times \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

На основании полученного выражения окончательно можно записать

$$(Z_c)_{\text{магнит.}} = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (15.13)$$

Выражение (15.13) в технической электродинамике определяет понятие характеристического сопротивления передающей линии, заполненной магнитоэлектриком без потерь.

## 16. Падение плоской волны на границу раздела двух сред.

Реально все волны, как правило, имеют сферический фронт, тем не менее, рассматривая распространение радиоволны на большие расстояния от радиоантенны, в виду большого радиуса кривизны сферы, фронт волны можно считать плоским.

Что касается курса "Теория антенн и распространение ра-

диоволн" то, при расчете диаграммы направленности радиоантенны, в области так называемой ближней зоны, необходимо рассматривать общий случай распространения электромагнитной волны.

Пусть плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде 1 с характеристиками  $\mu_{a1}, \epsilon_{a1}, \sigma_1$ , падает на границу раздела со средой 2, характеристики которой равны, соответственно  $\mu_{a2}, \epsilon_{a2}, \sigma_2$ . Пусть среды разделяются некоторой поверхностью  $S$  (рис.2.6).

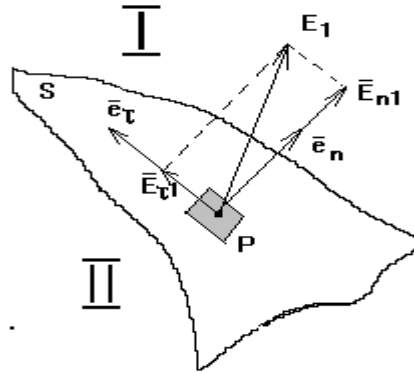


Рис. 2.6

На рисунке векторы  $\vec{e}_n, \vec{e}_\tau$  являются единичными радиус-векторами, из которых вектор  $\vec{e}_n$  называется единичным вектором внешней нормали, а вектор  $\vec{e}_\tau$  называется единичным вектором в тангенциальном или касательном направлении относительно поверхности  $S$ .

Пусть в первой среде электрическое поле характеризуется вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}_1$ . Путем параллельного переноса перенесем вектор  $\vec{E}_1$  в точку  $P$  и разложим его по взаимоперпендикулярным направлениям

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{n1} + \vec{E}_{\tau1}. \quad (16.1)$$

Аналогично выражению (16.1) можно записать выражения для векторов напряженности электрического поля в среде 2 и для векторов напряженности магнитного поля в средах 1 и 2. На основании сказанного, получаем

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{n2} + \vec{E}_{\tau2}, \quad (16.2)$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{n1} + \vec{H}_{\tau1}, \quad (16.3)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_{n2} + \vec{H}_{\tau2}. \quad (16.4)$$

Характеристики электрического и магнитного полей с индексами  $\tau$  в дальнейшем будем называть тангенциальными или касательными проекциями, а характеристики с индексом  $n$  в дальнейшем будем называть нормальными проекциями.

Получим связь между нормальными и тангенциальными проекциями векторов электрического и магнитного полей электромагнитной волны на границе раздела двух сред.

Рассматриваемые в дальнейшем граничные условия используются для сшивания получаемых решений для характеристик электромагнитного поля на границе раздела сред.

#### **17. Граничные условия для нормальных составляющих векторов магнитного поля.**

Проанализируем магнитную составляющую падающей на границу раздела двух сред электромагнитной волны. Для рассмотрения поведения вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред, выделим некоторую область пространства обеих сред в виде элементарного цилиндра с основанием  $\Delta S$  и длиной образующей цилиндра равной  $\Delta h$ .



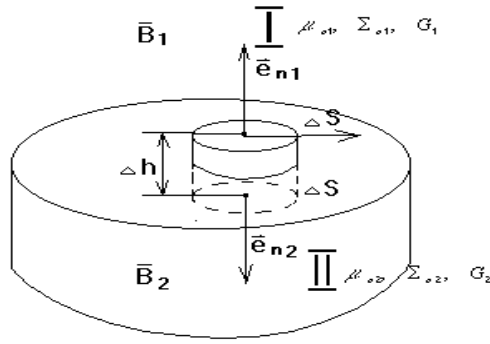


Рис. 2.7

Запишем закон неразрывности магнитных силовых линий для поверхности элементарного цилиндра

$$\oint_{S_{\text{ц}}} (\vec{B} d\vec{s}) = 0. \quad (17.1)$$

Представим поверхность цилиндра в виде суммы поверхностей нижнего и верхнего основания, а также боковой поверхности, тогда выражение (17.1) примет вид

$$\int_{\text{Сверх}} (\vec{B}_1 d\vec{s}) + \int_{\text{Сниз}} (\vec{B}_2 d\vec{s}) + \int_{\text{Сбок}} (\vec{B} d\vec{s}) = 0. \quad (17.2)$$

Будем вычислять каждое из слагаемых в левой части выражения (17.2).

1. Вычислим первое слагаемое в левой части выражения (17.2)

$$\int_{\text{Сверх}} (\vec{B}_1 d\vec{s}) = \int_{\text{Сверх}} (\vec{B}_{1\tau} + \vec{B}_{1n}) d\vec{s} = \int_{\text{Сверх}} \vec{B}_{1\tau} d\vec{s} + \int_{\text{Сверх}} \vec{B}_{1n} d\vec{s} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\text{Сверх}} \left( \vec{B}_{1\tau} ds \vec{e}_n \right) + \int_{\text{Сверх}} \left( \vec{B}_{1n} ds \vec{e}_n \right) = \int_{\text{Сверх}} \left| \vec{B}_{1\tau} \right| \cdot \left| \vec{e}_n \right| \cdot \cos \left( \vec{B}_{1\tau} \vec{e}_n \right) ds + \\
&+ \int_{\text{Сверх}} \left| \vec{B}_{1n} \right| \cdot \left| \vec{e}_n \right| \cdot \cos \left( \vec{B}_{1n} \vec{e}_n \right) ds = \int_{\text{Сверх}} B_{1\tau} \cdot 1 \cdot 0 \cdot ds + \int_{\text{Сверх}} B_{1n} \cdot 1 \cdot 1 ds = \\
&= \int_{\text{Сверх}} B_{1\tau} \cdot 0 \cdot ds + \int_{\text{Сверх}} B_{1n} \cdot 1 \cdot ds = 0 + B_{1n} \int_{\text{Сверх}} ds = B_{1n} \Delta S.
\end{aligned}$$

При выводе данного выражения величина нормальной составляющей  $B_{1n}$  была вынесена за знак поверхностного интеграла, так как величина цилиндрического объема является настолько малой, что в ее пределах величину  $B_{1n}$  можно считать постоянной. Таким образом, окончательно получаем

$$\int_{\text{Сверх}} \left( \vec{B}_1 ds \vec{e}_n \right) = B_{1n} \cdot \Delta S. \quad (17.3)$$

**2.** Вычислим второе слагаемое в левой части выражения (17.2). Все вычисления можно провести аналогично предыдущему пункту. В результате можно получить следующее выражение

$$\int_{\text{Сниз}} \left( \vec{B}_2 ds \vec{e}_n \right) = -B_{2n} \Delta S. \quad (17.4)$$

В формуле (17.4) появился знак минус, из-за того, что вектор нормали  $\vec{e}_n$  направлен вниз.

Подставляя, выражения (17.3) и (17.4) в соотношение (17.2), получаем

$$B_{1n} \Delta S - B_{2n} \Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{B} d\vec{s}) = 0. \quad (17.5)$$

Перейдем к пределу при  $\Delta h \rightarrow 0$  в левой и правой частях выражения (17.5):

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left( B_{1n} \Delta S - B_{2n} \Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{B} d\vec{s}) \right) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} 0,$$

Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов, следовательно, далее получаем

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} B_{1n} \Delta S - \lim_{\Delta h \rightarrow 0} B_{2n} \Delta S + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{B} d\vec{s}) = 0.$$

Ранее было отмечено, что величина  $B_{1n}$  является постоянной в пределах объема элементарного цилиндра, аналогично и величина  $B_{2n}$  является также постоянной в пределах этого объема. Поэтому, учитывая, что предел от постоянной величины равен этой постоянной величине, можно записать

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\text{const}) = \text{const},$$

далее запишем

$$B_{1n} \times \Delta S - B_{2n} \times \Delta S + 0 = 0. \quad (17.6)$$

При записи выражения (17.6) мы учли, что

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{B} d\vec{s}) = 0. \quad (17.7)$$

Выражение (17.7) физически означает, что при устремлении образующей цилиндра к нулю, величина боковой поверхности также стремиться к нулю, следовательно, число силовых линий, пронизывающих боковую поверхность цилиндра также стремиться к нулю.

Итак, выражение (17.6) принимает вид

$$(\mathbf{B}_{1n} - \mathbf{B}_{2n}) \times \Delta S = (\mathbf{B}_{1n} - \mathbf{B}_{2n}) \times 0 = 0.$$

Откуда получаем

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n}. \quad (17.8)$$

Выражение (17.8) называется граничным условием для нормальных составляющих вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ .

Нормальные составляющие вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  на границе раздела двух сред являются непрерывными.

Рассмотрим граничные условия для нормальной составляющей вектора  $\vec{H}$ . Для этого запишем материальное уравнение для магнитного поля в среде

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (17.9)$$

Спроектируем векторное уравнение (17.9) на направление нормали в обеих средах

$$\begin{cases} B_{1n} = \mu_{a1} H_{1n}, \\ B_{2n} = \mu_{a2} H_{2n}. \end{cases} \quad (17.10)$$

с учетом (17.10) и (17.8) примет вид

$$\mu_{a1} \cdot H_{1n} = \mu_{a2} H_{2n}. \quad (17.11)$$

Выражение (17.11) представляет собой понятие граничных условий для нормальных составляющих вектора  $\vec{H}$ .

Нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля электромагнитной волны на границе двух сред терпит разрыв.

### 18. Граничные условия для нормальных составляющих электрического поля.

Рассмотрим граничные условия для нормальных составляющих электрического поля

1. Рассмотрим сначала граничные условия для вектора электрического смещения  $\vec{D}$ . Воспользуемся тем же чертежом, что и в предыдущем параграфе, где вместо векторов магнитных индукций  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  необходимо проставить векторы электрических смещений  $\vec{D}_1$  и  $\vec{D}_2$ .

Запишем теорему Гаусса для вектора электрического смещения  $\vec{D}$  применительно к поверхности элементарного цилиндра

$$\int_S (\vec{D} d\vec{s}) = \int_V \rho dv. \quad (18.1)$$

Представим, как и в предыдущем параграфе, цилиндрическую поверхность в виде суммы трех составляющих, во-первых, в виде поверхности верхнего основания, во-вторых, в виде поверхности нижнего основания и, в-третьих, в виде боковой поверхности цилиндра. Тогда выражение (18.1) примет вид

$$\int_{\text{Сверх}} (\vec{D}_1 d\vec{s}) + \int_{\text{Сниз}} (\vec{D}_2 d\vec{s}) + \int_{\text{Сбок}} (\vec{D} d\vec{s}) = \int_V \rho dv. \quad (18.2)$$

По аналогии с предыдущим параграфом для первых двух слагаемых можно записать

$$\int_{\text{Сверх}} (\vec{D}_1 d\vec{s}) = D_{1n} \cdot \Delta S. \quad (18.3)$$

$$\int_{\text{Сниз}} (\vec{D}_2 d\vec{s}) = D_{2n} \times \Delta S. \quad (18.4)$$

Подставляем выражения (18.3) и (18.4) в соотношение (18.2), в результате получаем

$$D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{D} d\vec{s}) = \int_V \rho dv. \quad (18.4)$$

Перейдем к пределу в левой и правой частях выражения (18.4)

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left( D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S + \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{D} d\vec{s}) \right) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dv.$$

Учитывая, что предел разности или суммы функций равен разности или суммы пределов функций, далее можно записать

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} D_{1n} \Delta S - \lim_{\Delta h \rightarrow 0} D_{2n} \Delta S + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{D} d\vec{s}) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dv. \quad (18.5)$$

Третье слагаемое в левой части выражения (18.5) обращается в нуль. Что касается правой части, то при устремлении образующей цилиндра к нулю, он будет вырождаться в плоскую фигуру площадью  $\Delta S$  на границе раздела сред, следовательно, необходимо от объемной плотности заряда  $\rho$  перейти к поверхностной плотности заряда  $\sigma$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dv = \sigma \Delta S. \quad (18.6)$$

С учетом сказанного и выражения (18.6) можно записать

$$D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S + 0 = \sigma \Delta S.$$

Окончательно получаем

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma. \quad (18.7)$$

В случае отсутствия свободных зарядов на границе двух сред ( $\sigma = 0$ ), нормальная составляющая вектора электрического смещения является непрерывной, в противном случае при наличии поверхностного заряда нормальная составляющая вектора электрического смещения терпит разрыв.

2. Рассмотрим вывод граничного условия для вектора  $\vec{E}$ . Для этой цели воспользуемся материальным уравнением среды для электрического поля

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}. \quad (18.8)$$

Спроектируем векторное уравнение (18.8) на направление нормали, в результате получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} D_{1n} = \epsilon_{a1} E_{1n}, \\ D_{2n} = \epsilon_{a2} E_{2n}. \end{cases} \quad (18.9)$$

Вычитая, левые и правые части уравнений системы (18.9), и учитывая граничное условие (18.7), получим

$$\epsilon_{a1} E_{1n} - \epsilon_{a2} E_{2n} = \sigma. \quad (18.10)$$

Нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля терпит разрыв в обоих случаях, как при наличии поверхностного заряда на границе раздела двух сред, так и в его отсутствии.

## 19. Граничные условия для касательных составляющих магнитного поля.

Пусть плоская электромагнитная волна падает на границу раздела двух сред. Построим цилиндрическую поверхность на границе раздела двух сред (рис. 2.8). Проведем сечение построенной цилиндрической поверхности прямоугольным контуром  $L$  со сторонами  $\Delta L$  и  $\Delta h$ , при этом размеры плоской поверхности  $S$  будут настолько малы, что можно считать, что в ее пределах магнитное поле не изменяется.

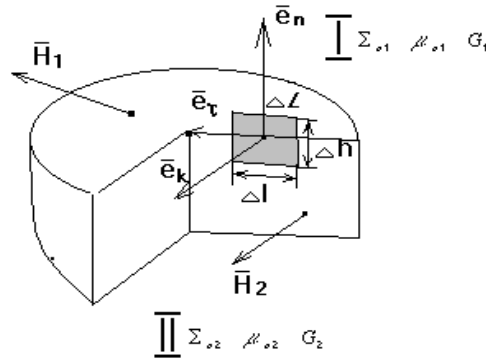


Рис. 2.8

Запишем теорему о циркуляции для вектора напряженности магнитного поля применительно к рассматриваемому контуру L

$$\oint_L \left( \vec{H} d\vec{l} \right) = \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}} + \vec{j}_{\text{стор}} \right) d\vec{s}. \quad (19.1)$$

Контур L представим в виде суммы трех контуров, в виде верхней, нижней и боковой частей контура

$$\begin{aligned} \int_{L_{\text{верх}}} \left( \vec{H}_1 d\vec{\ell} \right) + \int_{L_{\text{низ}}} \left( \vec{H}_2 d\vec{\ell} \right) + \int_{L_{\text{бок}}} \left( \vec{H} d\vec{\ell} \right) = \\ = \int \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}} + \vec{j}_{\text{стор}} \right) d\vec{s}. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Вычислим каждую из составляющих левой части выражения (19.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \\ \int_{L_{\text{верх}}} \left( \vec{H}_1 d\vec{\ell} \right) = \int_{L_{\text{верх}}} \left( \vec{H}_{1\tau} + \vec{H}_{1n} \right) d\vec{\ell} = \int_{L_{\text{верх}}} \left( \vec{H}_{1\tau} d\vec{\ell} \right) + \end{aligned} \quad (19.3)$$



$$+ \int_{L_{\text{верх}}} \left( \vec{H}_{1n} d\vec{\ell} \right) = H_{1\tau} \cdot \Delta L.$$

Так как выполняется следующее соотношение

$$\int_{L_{\text{верх}}} \left( \vec{H}_{1n} d\vec{\ell} \right) = 0,$$

но так как угол между векторами  $\vec{H}_{1n}$  и  $d\vec{\ell}$  равен  $90^0$  и учитывая, что  $\cos 90^0 = 0$ , получаем

$$\int_{L_{\text{низ}}} \left( \vec{H}_2 d\vec{\ell} \right) = \int_{L_{\text{низ}}} \left( \vec{H}_{2\tau} + \vec{H}_{2n} \right) d\vec{\ell} = -H_{2\tau} \Delta L.$$

2.  
(19.4)

$$\begin{aligned} 3. \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}} + \vec{j}_{\text{стор}} \right) d\vec{s} &= \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}\tau} + \vec{j}_{\text{пр}n} + \vec{j}_{\text{пр}k} \right) d\vec{s} \vec{e}_k + \\ &+ \int_S \left( \vec{j}_{\text{см}\tau} + \vec{j}_{\text{см}n} + \vec{j}_{\text{см}k} \right) d\vec{s} \vec{e}_k + \\ &+ \int_S \left( \vec{j}_{\text{стор}\tau} + \vec{j}_{\text{стор}n} + \vec{j}_{\text{стор}k} \right) d\vec{s} \vec{e}_k = \\ &= \left( \left| \left( \vec{j}_{\text{пр}} \right)_k \right| + \left| \left( \vec{j}_{\text{см}} \right)_k \right| + \left| \left( \vec{j}_{\text{стор}} \right)_k \right| \right) \Delta L \Delta h. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Запишем выражение (19.2) с учетом (19.3), (19.4) и (19.5) в следующем виде

$$\begin{aligned} H_{1\tau} \Delta L - H_{2\tau} \Delta L + \int_{L_{\text{бок}}} \left( \vec{H} d\vec{\ell} \right) &= \\ &= \left( \left| \left( \vec{j}_{\text{пр}} \right)_k \right| + \left| \left( \vec{j}_{\text{см}} \right)_k \right| + \left| \left( \vec{j}_{\text{стор}} \right)_k \right| \right) \Delta L \Delta h. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Перейдем к пределу при  $\Delta h \rightarrow 0$  в левой и правой частях

выражения (19.6). При этом пределы от первого и второго слагаемых в левой части получающегося выражения будут равны самим величинам, так как они не зависят от величины  $\Delta h$  и поэтому являются постоянными величинами. Третье слагаемое в левой части получающегося выражения, и все три слагаемых в правой части обратятся в ноль при  $\Delta h \rightarrow 0$ .

На основании вышесказанного запишем

$$H_{1\tau} \Delta L - H_{2\tau} \Delta L + 0 = 0,$$

откуда получаем

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = 0.$$

Итак, окончательно можно записать

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (19.7)$$

Выражение (19.7) представляет собой условие для тангенциальных составляющих вектора напряженности магнитного поля.

Тангенциальные (касательные) составляющие вектора напряженности магнитного поля являются непрерывными на границе раздела двух сред.

Рассмотрим вывод граничных условий для тангенциальных составляющих вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ . Для этого рассмотрим материальное уравнение для магнитного поля в веществе

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (19.8)$$

Спроектируем векторное уравнение (19.8) на тангенциальное направление в областях I и II

$$\begin{cases} B_{1\tau} = \mu_{a1} H_{1\tau}, \\ B_{2\tau} = \mu_{a2} H_{2\tau}. \end{cases} \quad (19.9)$$

Деля, левые и правые части уравнений системы (19.9), получаем

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \quad (19.20)$$

Выражение (19.20) называется граничным условием для тангенциальных (касательных) составляющих вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

Тангенциальные составляющие вектора индукции магнитного поля терпят разрыв на границе раздела двух сред.

## 20. Граничные условия для касательных составляющих векторов электрического поля.

Граничные условия для касательных составляющих вектора напряженности электрического поля получим на основе закона электромагнитной индукции в интегральной форме

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{\ell}) = - \int_S \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} \right). \quad (20.1)$$

В данном случае рисунок, такой же, как и в параграфе 19, при этом контур будет также выбираться в виде прямоугольника со сторонами  $\Delta L$  и  $\Delta h$ , при этом размеры плоской поверхности  $S$  будут настолько малы, что можно считать, что в ее пределах магнитное поле не изменяется.

Рассмотрим преобразования в выражении (20.1) отдельно для левой и правой частей данного соотношения.

1. В левой части интеграл по замкнутому контуру  $L$  представим в виде трех составляющих, а в правой части в виде суммы трех проекций

$$\int_{L_{\text{верх}}} (\vec{E}_1 d\vec{\ell}) + \int_{L_{\text{низ}}} (\vec{E}_2 d\vec{\ell}) + \int_{L_{\text{бок}}} (\vec{E} d\vec{\ell}) =$$

$$= - \int \left( \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\tau} + \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\text{n}} + \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\text{k}} \right) d \vec{s}.$$

Проводя соответствующие преобразования, получаем

$$(E_{1\tau} - E_{1n}) \Delta L + \int_{L_{\text{бок}}} (\vec{E} d \vec{\ell}) = \left| \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_{\text{k}} \right| \cdot 1 \cdot 1 \cdot \Delta L \cdot \Delta h.$$

Переходя к пределу в левой и правой частях последнего выражения при  $\Delta h \rightarrow 0$ , получим

$$(E_{1\tau} - E_{1n}) \Delta L + 0 = 0,$$

откуда окончательно получаем

$$E_{1\tau} = E_{1n}. \quad (20.2)$$

Выражение (20.2) называется граничным условием для касательных составляющих вектора напряженности электрического поля.

Касательные составляющие векторов напряженности электрического поля на границе раздела двух сред являются непрерывными.

**2.** Рассмотрим материальное уравнение для электрического поля в среде

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}. \quad (20.3)$$

Спроектируем векторное уравнение (20.3) на касательное направление в обеих средах

$$\begin{cases} D_{1\tau} = \epsilon_{a1} E_{1\tau}, \\ D_{2\tau} = \epsilon_{a2} E_{2\tau}. \end{cases} \quad (20.4)$$

Деля, левые и правые части уравнений системы (20.4), получим

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}. \quad (20.5)$$

Выражение (20.4) называется граничным условием для касательных составляющих вектора электрического смещения  $\vec{D}$  на границе раздела двух сред.

Касательные составляющие векторов электрического смещения на границе разделов двух сред терпят разрыв.

### **Глава №3. Распространение электромагнитных волн в направляющих структурах**

#### **1. Поляризация электромагнитной волны.**

В теории электрических цепей передача электромагнитной энергии осуществляется по обычным металлическим проводникам, а в диапазоне СВЧ электромагнитная энергия передается по специальным направляющим структурам, называемых волноводами, которые имеют различные сечения в виде прямоугольной или круглой формы.

При передаче энергии в волноводах используется явление формирования направляющей бегущей волны при наклонном падении поляризованной волны на металлическую поверхность.

**Поляризованной волной** называется электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  которой, совершает колебания в одной и той же плоскости.

**Плоскостью поляризации** называется плоскость, в которой совершает колебания вектор напряженности электрического поля электромагнитной волны  $\vec{E}$ .

При падении электромагнитной волны на металлическую поверхность, на электроны металла оказывают влияние, как электрическое, так и магнитное поля. Однако, если оценить

силу, действующую со стороны векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , то окажется, что сила действующая со стороны вектора  $\vec{E}$ , на несколько порядков выше, чем со стороны вектора  $\vec{H}$ . Это означает, что при падении электромагнитной волны на металлическую поверхность за основу берут эффект воздействия вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  электромагнитной волны, на электроны металла. В случае электромагнитной волны светового диапазона вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  получил название светового вектора.

Естественный свет не является поляризованным, так как естественный свет получается в результате излучения атомами нагретого вещества, но так как различные атомы излучают энергию хаотически (не связанным образом между собой), то плоскость колебаний векторов  $\vec{E}$  для каждого атома будет различным образом ориентирована в пространстве, следовательно, результирующий вектор  $\vec{E}$  электромагнитной волны в различные моменты времени будет совершать колебания в разных плоскостях.

В настоящее время существуют два источника высокополяризованных электромагнитных волн: во-первых, радиоволна, во-вторых, лазерное излучение.

Например, радиоволна является поляризованной, так как она формируется в результате излучения колеблющихся электронов в излучающей радиоантенне. Так как эти колебания являются вынужденными, то все электроны в данный полупериод движутся в одном направлении, следовательно, вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  для всех электронов будет ориентирован в одном направлении.

В курсе физики для бегущей одномерной электромагнитной волны записывается следующее выражение для модуля вектора напряженности электрического поля

$$E = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (1.1)$$

где:  $E_m$  - амплитуда вектора напряженности электрического поля,  $\varphi_0$  - начальная фаза колебаний,  $\omega$  - частота,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число.

Пусть электромагнитная волна пришла в данную точку пространства координата, которой фиксирована. Тогда выражение (1.1) принимает вид

$$E = E_m \cos(\omega t - \Psi), \quad (1.2)$$

где  $\Psi$  - начальная фаза волны в данной точке пространства.

## 2. Линейно-поляризованные электромагнитные волны.

Пусть в данную точку пространства пришли две электромагнитные волны, при этом одна распространялась по оси ОХ, а другая по оси ОУ. Уравнения электромагнитных волн согласно выражения (1.1) запишем в следующем виде

$$E_x = E_{m1} \cos(\omega t - \Psi_1), \quad (2.1)$$

$$E_y = E_{m2} \cos(\omega t - \Psi_2), \quad (2.2)$$

здесь  $E_{m1}$  и  $E_{m2}$  - амплитуды соответствующих волн, а  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  - начальные фазы волн.

Рассмотрим случай синфазности волн. Условие синфазности запишется в виде

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi. \quad (2.3)$$

Деля, левые и правые части (2.1) и (2.2), получаем

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{E_{m1}}{E_{m2}}.$$

Откуда далее получаем

$$E_y = \frac{E_{m1}}{E_{m2}} \cdot E_x \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) представляет из себя уравнение прямой, на основании этого уравнения строим рис. 3.1, исходя из которого заключаем, что вектор  $\vec{E}$  совершает колебания вдоль диагонали прямоугольника. На рисунке отмечено положение вектора  $\vec{E}$  в фиксированный момент времени.

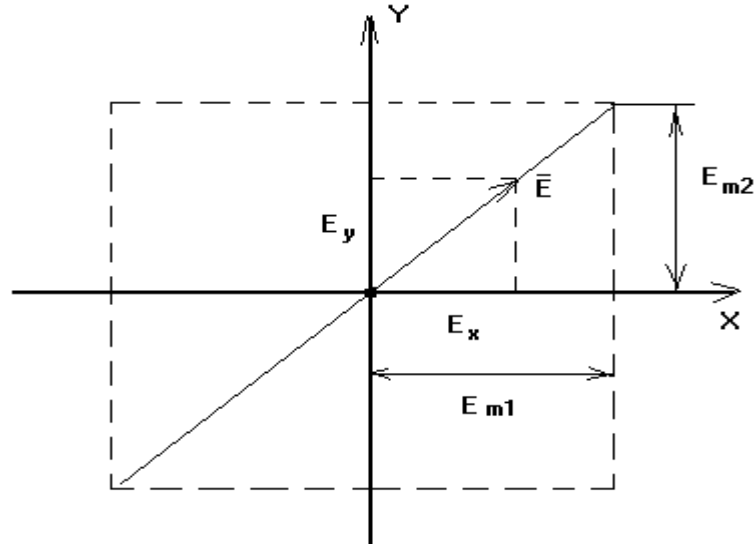


Рис. 3.1

**Линейно-поляризованной волной** называется электромагнитная волна, результирующий вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , которой, совершает колебания вдоль одной и той же прямой.

Рассмотрим применение линейно-поляризованной волны для развязки радиоканалов. Пусть на штыревую антенну падает линейно-поляризованная волна. При падении электромагнитной волны на антенну электромагнитное поле воздей-



ствует на свободные электроны в металлическом проводе антенны. Выражение для действующей силы на электроны имеет следующий вид

$$\vec{F}_\text{л} = q\vec{E} + q \cdot \left[ \vec{v} \vec{B} \right] \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) представляет собой понятие силы Лоренца.

Оценка слагаемых в выражении (2.5) как было сказано выше показывает, что первое слагаемое больше второго на несколько порядков. Это означает, что выражение для силы, действующей на электроны провода радиоантенны определяется следующим выражением

$$\vec{F}_\text{л} = q\vec{E} \quad (2.6)$$

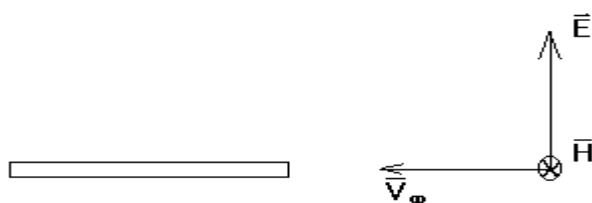


Рис. 3.2

Исходя из приведенного рис. 3.2 заключаем, что расположенная таким образом штыревая антенна не будет воспринимать передаваемый сигнал, так как электрическое поле электромагнитной волны будет приводить только к движению электронов между боковыми стенками проводников. Однако если штыревую антенну повернуть на 90 градусов, то данная антенна максимальным образом будет воспринимать приходящие сигналы.

Данный факт используется для развязки радиоканалов следующим образом. Пусть на взаимно перпендикулярные антенны 1 и 2 (рис.3.3) падает радиоволна, в которой находятся два информационно-кодированных сигнала, векторы на-

пряженности электрического поля  $\vec{E}$ , которых взаимно перпендикулярны. В данном случае антенна 1 будет принимать сигнал 1, а антенна 2 будет принимать сигнал 2.

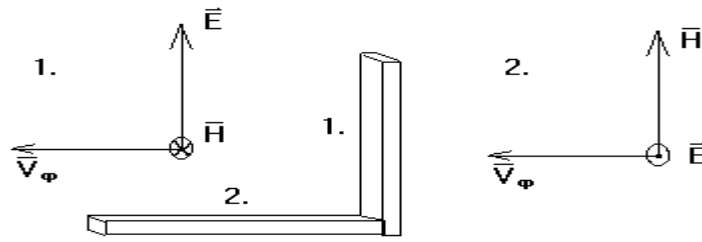


Рис. 3.3

### 3. Электромагнитные волны с круговой и эллиптической поляризацией.

Пусть в данную точку пространства пришли две линейно-поляризованные электромагнитные волны. У первой волны колебания вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}_1$  происходят по оси OX, у второй электромагнитной волны колебания вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}_2$  происходят по оси OY. В данном случае для проекций векторов напряженностей электрических полей на соответствующие оси можно записать

$$E_x = E_{m1} \cos(\omega t - \Psi_1), \quad (3.1)$$

$$E_y = E_{m2} \cos(\omega t - \Psi_2). \quad (3.2)$$

Пусть пришедшие волны являются не только не синфазными, но и их разность фаз равна  $\frac{\pi}{2}$ . Это означает, что

$$\Delta\Psi = \Psi_1 - \Psi_2 = \frac{\pi}{2}$$

На основании сказанного можно записать

$$\begin{aligned}
\cos(\omega t - \Psi_2) &= \cos\left(\omega t - \left(\Psi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left((\omega t - \Psi_1) - \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \cos(\omega t - \Psi_1) \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin(\omega t - \Psi_1) \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \\
&= \sin(\omega t - \Psi_1) \cdot 1 = \sin(\omega t - \Psi_1).
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

С учетом выражения (3.3) соотношения (3.1) и (3.2) можно записать в виде

$$E_x = E_{m1} \cos(\omega t - \Psi_1). \tag{3.4}$$

$$E_y = E_{m2} \sin(\omega t - \Psi_1). \tag{3.5}$$

Поделим левую и правую части уравнения (3.4) на величину  $E_{m1}$ , а выражения (3.5) на величину  $E_{m2}$ , в результате получим

$$\frac{E_x}{E_{m1}} = \cos(\omega t - \Psi_1). \tag{3.6}$$

$$\frac{E_y}{E_{m2}} = \sin(\omega t - \Psi_1). \tag{3.7}$$

Возведем в квадрат левые и правые части выражений (3.6) и (3.7), в результате сложения получаем

$$\frac{E_x^2}{E_{m1}^2} + \frac{E_y^2}{E_{m2}^2} = \cos^2(\omega t - \Psi_1) + \sin^2(\omega t - \Psi_1) = 1$$

Таким образом, окончательно можно записать

$$\frac{E_x^2}{E_{m1}^2} + \frac{E_y^2}{E_{m2}^2} = 1 \tag{3.8}$$

Исходя из выражения (3.8) заключаем, что при наложение двух не синфазных волн линейно-поляризованных волн со

сдвигом фаз  $\frac{\pi}{2}$  в общем случае получается результирующая волна, вектор  $\vec{E}$ , которой совершает колебания по эллипсу. Данный факт приведен на рис. 3.4.

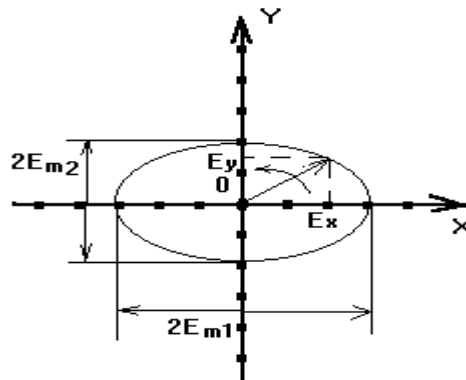


Рис. 3.4

Рассмотренный вид поляризованной волны называется волной с эллиптической поляризацией. В данном случае вектор электрического поля  $\vec{E}$  электромагнитной волны совершает вращательное движение по эллиптической траектории.

При этом, если вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  вращается против часовой стрелки, то такая волна называется волной с левосторонней поляризацией, а если вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  вращается по часовой стрелке, то такая волна называется волной с правосторонней поляризацией.

Пусть рассматриваемые электромагнитные волны имеют одинаковую амплитуду ( $E_{m1} = E_{m2} = E_m$ ), тогда выражение (3.5) примет следующий вид

$$E_x^2 + E_y^2 = E_m^2. \quad (3.9)$$

Выражение (3.9) является уравнением окружности. В данном случае вектор напряженности электрического поля

$\vec{E}$  совершает вращательное движение по круговой траектории, при этом в разных точках траектории модуль вектора напряженности электрического поля будет иметь одинаковую величину амплитуды. На рис.3.5 приведен случай круговой поляризации.

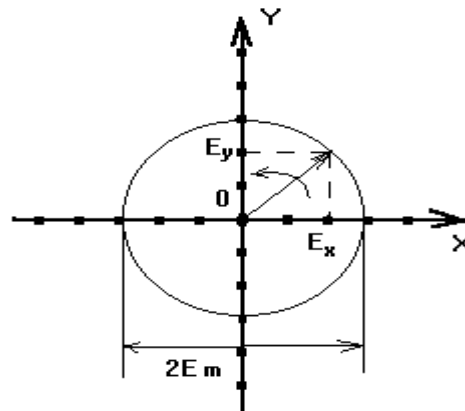
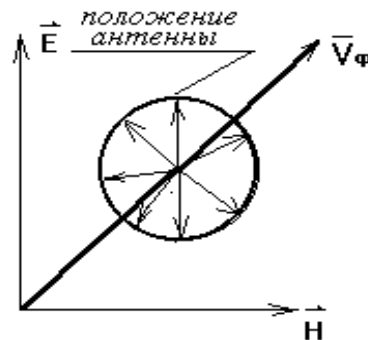


Рис. 3.5

Рассмотренный факт круговой поляризации используется для цели организации радиосвязи с движущимися объектами, местоположение которых время от времени меняется в пространстве. В данном случае радиоантенна располагается в плоскости, перпендикулярной плоскости распространения электромагнитной волны с круговой поляризацией. Этот факт показан на рис. 3.6.



#### 4. Падение плоской волны с параллельной поляризацией на металлическую поверхность.

В технике СВЧ рассматриваются волны двух типов.

Во-первых, волны Е-типа и во-вторых, волны Н-типа. Эти волны представляют из себя бегущие электромагнитные волны в направляющих структурах. Причем бегущая электромагнитная волна в заданном направлении получается в результате формирования подобного процесса с помощью эффекта отражения электромагнитной волны металлической поверхностью. Этот эффект возможен в случае, когда на металлическую поверхность наклонно падает электромагнитная волна с параллельной или перпендикулярной поляризациями.

Рассмотрим отдельно оба случая волн с различной поляризацией.

**1). Параллельная поляризация.** Этот вид поляризации наблюдается в случае падения плоской электромагнитной волны на металлическую поверхность, когда вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  совершает колебания в плоскости падения волны. Вектор  $\vec{E}$  в данном случае, как мы выяснили выше может совершать колебания, как вдоль прямой линии, а также либо по эллипсу, либо по кругу.

**2). Перпендикулярная поляризация.** Этот вид поляризации наблюдается в случае падения плоской электромагнитной волны на металлическую поверхность, когда вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  совершает колебания в плоскости перпендикулярной плоскости падения волны. Вектор  $\vec{E}$  в данном случае также, как и в случае волны с параллельной поляризацией может совершать колебания, как вдоль прямой, а также либо по эллипсу, либо по кругу.

В дальнейшем будем считать, что плоскость падения совпадает с плоскостью чертежа.

Ранее было отмечено, что метод комплексных амплитуд в случае распространения волны в пространстве можно запи-

сать для вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  следующее выражение

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} \quad (4.1)$$

В выражении (4.1) величина

$$\dot{\vec{E}}(\vec{r}) = \dot{E} e^{-j(\vec{k} \vec{r})} \quad (4.2)$$

называется комплексной амплитудой.

Рассмотрим вид сомножителя  $e^{-j(\vec{k} \vec{r})}$  для случая падающей и отраженной волн (рис. 3.7). В данном выражении вектор  $\vec{k}$  называется волновым вектором. В дальнейшем необходимо будет ввести понятия волновых векторов, соответственно для падающей и отраженной волн. Рассмотрим понятия волновых векторов для этих волн отдельно.

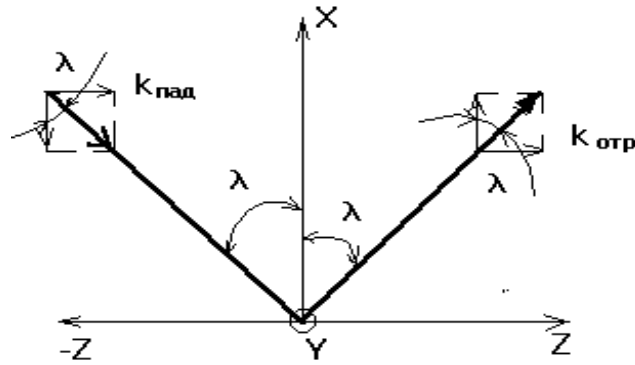


Рис. 3.7

### 1). Падающая волна.

Найдем скалярное произведение векторов в экспоненциальном сомножителе выражения (4.2)

$$(\vec{k}_{\text{пад}} \vec{r}) = (k_x)_{\text{пад}} \cdot x + (k_y)_{\text{пад}} \cdot y + (k_z)_{\text{пад}} \cdot z. \quad (4.3)$$

Из рисунка 3.7 следует, что

$$\begin{cases} (k_x)_{\text{пад}} = -k \cdot \cos \varphi, \\ (k_y)_{\text{пад}} = 0, \\ (k_z)_{\text{пад}} = k \cdot \sin \varphi. \end{cases} \quad (4.4)$$

С учетом выражения (4.4) соотношение (4.3) принимает вид

$$(\vec{k}_{\text{пад}} \vec{r}) = -k \cdot \cos \varphi \cdot x + 0 \cdot y + k \cdot \sin \varphi \cdot z = k(-x \cdot \cos \varphi + z \cdot \sin \varphi). \quad (4.5)$$

С учетом выражения (4.5) экспоненциальный множитель примет вид

$$e^{-j(\vec{k}_{\text{пад}} \vec{r})} = e^{-j k(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}. \quad (4.6)$$

## 2). Отраженная волна.

Для отраженной волны по аналогии с рассмотренным выше случаем для падающей волны, т.е. аналогично выражению (4.6) можно записать

$$e^{-j(\vec{k}_{\text{отраж}} \vec{r})} = e^{-j k(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}. \quad (4.7)$$

## 5. Структура результирующего электрического поля при наклонном падении электромагнитной волны с параллельной поляризацией.

Пусть на металлическую поверхность наклонно падает электромагнитная волна с параллельной поляризацией. Изобразим схематически процесс взаимодействия электромагнитной волны с металлической поверхностью с помощью следующего рисунка 3.8.



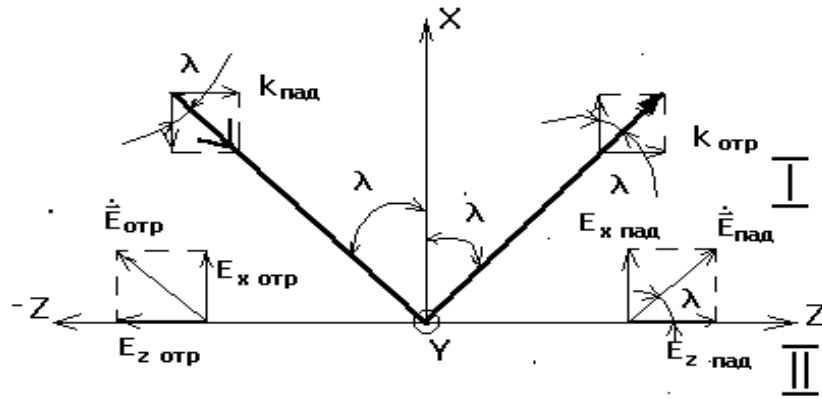


Рис. 3.8

Рассмотрим выражение для комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля падающей электромагнитной волны

$$\vec{E}_{\text{пад}}(\vec{r}) = \left( \vec{E}_{\text{пад}} \right)_0 e^{(\vec{k}_{\text{пад}} \vec{r})}. \quad (5.1)$$

В этом выражении величина

$$\left( \vec{E}_{\text{пад}} \right)_0 = E_m \sin \varphi \cdot \vec{e}_x + E_m \cos \varphi \cdot \vec{e}_z. \quad (5.2)$$

называется комплексной амплитудой. В выражении (5.2)

величина  $E_m$  называется физической амплитудой.

С учетом выражений (5.2) и (4.6) соотношение (5.1) принимает вид

$$\vec{E}_{\text{пад}}(\vec{r}) = \left( E_m \sin \varphi \cdot \vec{e}_x + E_m \cos \varphi \cdot \vec{e}_z \right) e^{-j k (-x \cos \varphi + z \sin \varphi)} \quad (5.3)$$

В области I результирующее поле складывается из поля падающей и поля отраженной волн. Поэтому для комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля

можно записать, что

$$\left( \vec{E}_{\text{рез}} \right)_0 = \left( \vec{E}_{\text{пад}} \right)_0 + \left( \vec{E}_{\text{отраж}} \right)_0. \quad (5.4)$$

Спроектируем векторное уравнение (5.4) на направление оси OZ, в результате получим

$$\left( \vec{E}_{\text{рез}} \right)_{z0} = \left( \vec{E}_{\text{пад}} \right)_{z0} + \left( \vec{E}_{\text{отраж}} \right)_{z0} = 0. \quad (5.5)$$

В правой части соотношения (5.5) появилась величина, равная нулю из-за того, что в области II электрическое поле отсутствует. Тогда из соотношения (5.5) следует

$$\left( \vec{E}_{\text{пад}} \right)_{z0} = - \left( \vec{E}_{\text{отраж}} \right)_{z0} = -E_m \cos \varphi. \quad (5.6)$$

Согласно приведенного рисунка в случае отсутствия поглощения электромагнитной волны на границе раздела сред далее можно записать

$$\left( \vec{E}_{\text{пад}} \right)_{x0} = \left( \vec{E}_{\text{отраж}} \right)_{x0} = -E_m \sin \varphi. \quad (5.7)$$

С учетом выражений (5.6), (5.7) и (4.7) для комплексной амплитуды отраженной волны можно записать

$$\vec{E}_{\text{отраж}} \left( \vec{r} \right) = E_m \left( \sin \varphi \vec{e}_x - \cos \varphi \vec{e}_y \right) e^{-jk(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}. \quad (5.8)$$

Согласно принципа суперпозиции электрических полей результирующее электрическое поле в области I будет складываться из векторной суммы падающей и отраженных волн

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_{\text{пад}} + \vec{E}_{\text{отраж}}. \quad (5.9)$$

С учетом (5.3) и (5.8) соотношение (5.9) примет вид

$$\vec{E}_{\text{рез}} = E_m e^{-jkz \sin \varphi} \cdot \left( \sin \varphi \cdot (e^{jkx \cos \varphi} + e^{-jkx \cos \varphi}) \cdot \vec{e}_x + \right. \\ \left. + \cos \varphi \cdot (e^{jkx \cos \varphi} - e^{-jkx \cos \varphi}) \cdot \vec{e}_z \right).$$

Для дальнейшего учтем формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$$

Далее получаем

$$\vec{E}_{\text{рез}} = E_m e^{-jkz \sin \varphi} \left( 2 \sin \varphi \cos (kx \cos \varphi) \vec{e}_x + \right. \\ \left. + 2j \cos \varphi \sin (kx \cos \varphi) \vec{e}_z \right) = \\ = 2 E_m \left( \sin \varphi \cos (kx \cos \varphi) \vec{e}_x + \right. \\ \left. j \cos \varphi \sin (kx \cos \varphi) \vec{e}_z \right) e^{-jkz \sin \varphi}. \quad (5.10)$$

Выражение (5.10) представляет из себя понятие комплексной амплитуды результирующего вектора электрического поля электромагнитной волны.

На основании сказанного сделаем следующие выводы

**1.** Вектор напряженности электрического поля состоит из двух составляющих: одна в направлении распространения, другая в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны.

2. Экспоненциальный множитель  $e^{-jkz \sin \varphi}$  означает, что результирующее электрическое поле представляет из себя плоскую бегущую волну в направлении оси OZ.

3. Из выражения (5.10) видно, что амплитуда колебаний электрического поля в виде сомножителя перед экспонентой зависит от поперечной координаты  $x$ . Поэтому из-за наличия сомножителей  $\cos(kx \cos \varphi)$  и  $\sin(kx \cos \varphi)$  заключаем, что в поперечном направлении электромагнитная волна имеет вид стоячей волны.

4. Пусть угол падения  $\angle \varphi = 0^\circ$ . В данном случае выражение (5.10) принимает следующий вид

$$\vec{E}_{\text{рез}}(\vec{r}) = 2jE_m \sin(kx) \cdot \vec{e}_z \quad (5.11)$$

Вычисляя действительную часть от выражения (5.11), заключаем, что в данном случае вдоль направляющей структуры распространения волны не будет.

5. Пусть угол падения  $\angle \varphi = 90^\circ$ . В данном случае выражение (5.10) принимает следующий вид

$$\vec{E}_{\text{рез}}(\vec{r}) = 2E_m \cdot e^{-jkz} \cdot \vec{e}_x \quad (5.12)$$

Вычисляя действительную часть от выражения (5.12), заключаем, что в данном случае вдоль направляющей структуры будет распространяться чисто поперечная волна.

#### **6. Структура результирующего магнитного поля при наклонном падении электромагнитной волны с параллельной поляризацией.**

Рассмотрим случай наклонного падения электромагнитной волны с параллельной поляризацией под углом  $\varphi$  к нормали металлической поверхности. Данный факт изображен на рис.3.9.

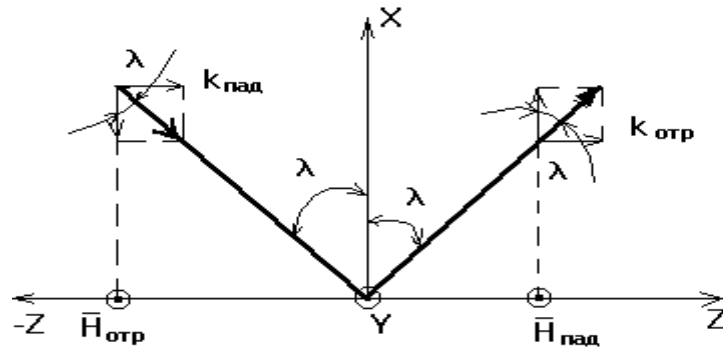


Рис. 3.9

При решении уравнения Гельмгольца, мы показали, что если в плоской электромагнитной волне существует только проекция вектора напряженности электрического поля по оси  $OX$ , то для магнитного поля будет существовать только проекция вектора напряженности по оси  $OY$ .

Ранее мы получили, что комплексные амплитуды этих проекций связаны следующим соотношением

$$\dot{H}_y = \frac{1}{Z_c} \dot{E}_x \quad (6.1)$$

В выражении (6.1) величина  $Z_c$  в технической электродинамике называется характеристическим сопротивлением передающей линии.

Запишем выражения для комплексных амплитуд магнитного поля падающей и отраженной волн следующие выражения

$$\vec{\dot{H}}_{\text{пад}} = \frac{1}{Z_c} \left( \dot{E}_x \right)_{\text{пад}} \vec{e}_y, \quad (6.2)$$

$$\vec{\dot{H}}_{\text{отраж}} = \frac{1}{Z_c} \left( \dot{E}_x \right)_{\text{отраж}} \vec{e}_y. \quad (6.3)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся выражениями для комплексных амплитуд электрического поля па-

дающей и отраженной волн

$$\left( \vec{E}_x \right)_{\text{пад}} = E_m \sin \varphi e^{-j(\vec{k}_{\text{пад}} \vec{r})}, \quad (6.4)$$

$$\left( \vec{E}_x \right)_{\text{отраж}} = E_m \sin \varphi e^{-j(\vec{k}_{\text{отраж}} \vec{r})}. \quad (6.5)$$

С учетом соотношений (6.4) и (6.5) выражения (6.2) и (6.3) принимают следующий вид

$$\vec{H}_{\text{пад}} = \frac{1}{Z_c} E_m \sin \varphi e^{-j \vec{k}_{\text{пад}} \vec{r}} \vec{e}_y, \quad (6.6)$$

$$\vec{H}_{\text{отраж}} = \frac{1}{Z_c} E_m \sin \varphi e^{-j(\vec{k}_{\text{пад}} \vec{r})} \vec{e}_y. \quad (6.7)$$

Выражения (6.6) и (6.7) представляют из себя соответственно комплексные амплитуды магнитного поля падающей и отраженной волн.

Найдем комплексную амплитуду результирующего магнитного поля электромагнитной волны согласно принципа суперпозиции магнитных полей

$$\vec{H}_{\text{рез}} = \vec{H}_{\text{пад}} + \vec{H}_{\text{отраж}}. \quad (6.8)$$

Выражение (6.8) с учетом соотношений (6.6) и (6.7) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\text{рез}} &= \vec{H}_{\text{пад}} + \vec{H}_{\text{отраж}} = \\ &= \frac{E_m}{Z_c} e^{-j k z \sin \varphi} \sin \varphi \cdot 2 \cdot \cos(k x \cos \varphi) \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\vec{H}_{\text{рез}} \left( \vec{r} \right) = \frac{2E_m}{Z_c} \sin \varphi \cdot \cos(k x \cos \varphi) \cdot e^{-j k z \sin \varphi} \vec{e}_y. \quad (6.9)$$

Выражение (6.9) представляет из себя понятие комплексной амплитуды вектора напряженности результирующего магнитного поля.

Проведем анализ выражения (6.9).

1. Вектор напряженности магнитного поля в результирующей электромагнитной волне имеет только поперечную составляющую по оси OY.

2. Наличие экспоненциального сомножителя  $e^{-jkz \sin \varphi}$  свидетельствует о том, что результирующее магнитное поле распространяется в виде плоской волны, вдоль оси OZ, т.е. вдоль направляющей структуры, например, вдоль оси волновода.

3. Наличие сомножителя  $\cos(kx \cdot \cos \varphi)$  свидетельствует о том, что амплитуда магнитного поля является функцией только от поперечной координаты, т.е. в поперечном направлении магнитное поле имеет характер стоячей волны.

4. Пусть угол падения электромагнитной волны равен нулю, т.е.  $\angle \varphi = 0$ . В данном случае из выражения (6.9) следует, что

$$\vec{H}_{\text{рез}}(\vec{r}) = 0. \quad (6.10)$$

Из выражения (6.9) следует, что при нормальном падении на металлическую поверхность электромагнитной волны вдоль направляющей структуры будет отсутствовать бегущая волна магнитного поля.

5. Пусть угол падения электромагнитной волны  $\angle \varphi = 90^\circ$ . В данном случае падающая электромагнитная волна скользит вдоль металлической поверхности. В данном случае из выражения (6.9) следует, что

$$\vec{H}_{\text{рез}}(\vec{r}) = \frac{2E_m}{Z_c} \cdot e^{-jkz} \vec{e}_y. \quad (6.11)$$

Исходя из соотношения (6.11) можно заключить, что вдоль направляющей структуры будет распространяться бе-

гущая волна магнитного поля.

## **7. Волны Е и Н типов.**

Электромагнитные волны, распространяющиеся в СВЧ структурах разделяются на два типа. Рассмотрим эти типы волн отдельно.

### **1). Волны Е типа.**

В данном случае результирующая волна, распространяющаяся в СВЧ-структурах, формируется в результате наклонного падения электромагнитной волны под углом  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  на металлическую поверхность. В данном случае вектор напряженности магнитного поля имеет только поперечную составляющую. Следовательно, магнитное поле результирующей волны имеет линейную поляризацию.

Вектор напряженности электрического поля в данном случае имеет две составляющие. Одна из них направлена вдоль оси направляющей СВЧ-структуры. Другая из них направлена в поперечном направлении. Так как обе составляющие электрического поля являются взаимоперпендикулярными и имеют различные амплитуды, то заключаем, что электрическое поле результирующей электромагнитной волны будет иметь эллиптическую поляризацию. Что касается результирующей волны в СВЧ-структуре, то она имеет гораздо более сложное строение при распространении в среде, чем при распространении в свободном пространстве. А именно, в продольном направлении она имеет характер бегущей волны, а в поперечном направлении она имеет характер стоячей волны. Такие электромагнитные волны, имеющие только поперечную составляющую магнитного поля в технической электродинамике получили название волн Е-типа или ТМ волн.

### **2). Волны Н типа.**

В данном случае, если провести аналогичные расчеты для наклонного падения электромагнитной волны с перпендикулярной поляризацией под углом  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  к металлической поверхности, то можно прийти к следующим результатам.



Во-первых, вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  при падении на металлическую поверхность имеет только проекцию по оси ОУ.

Во-вторых, вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  имеет две составляющие по взаимоперпендикулярным направлениям, т.е. вектор результирующей волны будет иметь также две составляющие по осям ОХ и ОZ.

Такие электромагнитные волны, имеющие только одну поперечную составляющую вектора напряженности электрического поля в технической электродинамике получили название волн Н типа или ТЕ волн.

### 8. Характеристики волн Е и Н типов.

При наклонном падении на металлическую поверхность с параллельной и перпендикулярной поляризацией, получаются волны Е и Н типов.

Эти волны имеют характер бегущей волны распространяющейся вдоль направляющей структуры, на что указывает экспоненциальный множитель  $e^{-j k z \sin \varphi}$ , и в поперечном направлении характер стоячей волны, на что указывает сомножители:  $\cos(kx \cdot \cos \varphi)$  и  $-\sin(\cos kx \cdot \cos \varphi)$ , следовательно, можно ввести понятие продольной и поперечной волны.

#### 1). Волновые числа.

В свободном пространстве бегущая плоская волна описывается экспоненциальным множителем  $e^{-j \cdot k z}$ , следовательно, для продольного волнового числа из сравнения экспоненциальных множителей для бегущей волны в свободном пространстве и вдоль направляющей структуры можно записать

$$k_{||} = k \sin \varphi \quad (8.1)$$

Выражение (8.1) определяет понятие продольного волнового числа.

Для свободного пространства в уравнения стоячей волны

входят сомножители:  $\cos kx$  или  $\sin kx$  в зависимости от начальной фазы, сравнивая эти сомножители в виде  $\cos kx$  и  $\sin kx$  для направляющей структуры, можно записать

$$k_{\perp} = k \cos \varphi. \quad (8.2)$$

Выражение (8.2) определяет понятие поперечного волнового числа.

Возводя в квадрат, левые и правые части (8.1) и (8.2) с последующим их сложением, можно получить

$$k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 = k^2 \cos^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi = k^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = k^2. \quad (8.3)$$

Выражение (8.3) определяет связь продольного и поперечного волнового числа для направляющей структуры с волновым числом  $k$  электромагнитной волны в свободном пространстве.

## 2). Длины волн.

В курсе физики волновое число определяется как характеристика волны, численно равную количеству длин волн, укладываемых на расстояние в  $2\pi$  метра. Вектор  $\vec{k}$ , модулем, которого является волновое число, мы назвали волновым вектором, и он направлен в сторону распространения волны. Согласно формул (8.1) и (8.2) заключаем, что при формировании направляющей электромагнитной волны вдоль металлической поверхности, необходимо вводить понятие продольной и поперечной волн.

Рассмотрим выражение для волнового числа для свободного пространства в следующем виде

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (8.4)$$

Из выражения (8.4) получим выражение для длины волны в свободном пространстве.

Выразим из выражения (8.4) величину длины волны  $\lambda_0$

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k}. \quad (8.5)$$

Согласно выражения (8.5) для длины волны в продольном направлении можно записать

$$\lambda_{\parallel} = \frac{2\pi}{k_{\parallel}} = \frac{2\pi}{k \sin \varphi} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \varphi}.$$

Итак, получаем

$$\lambda_{\parallel} = \frac{\lambda_0}{\sin \varphi}. \quad (8.6)$$

Так как  $\sin \varphi < 1$ , то из выражения (8.6) следует, что

$$\lambda_{\parallel} > \lambda_0. \quad (8.7)$$

Аналогично выражения (8.7) для длины волны в поперечном направлении можно записать

$$\lambda_{\perp} = \frac{\lambda_0}{\cos \varphi}. \quad (8.8)$$

так как  $\cos \varphi < 1$ , то из выражения (8.8) следует, что

$$\lambda_{\perp} > \lambda_0. \quad (8.9)$$

При распространение электромагнитной волны вдоль направляющей структуры, продольная и поперечная длина волны, будут по значению больше длины волны в свободном пространстве.

### 3). Фазовая скорость.

Ранее получено следующее выражение для фазовой скорости волны

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}. \quad (8.10)$$

Так как результирующая электромагнитная волна бежит вдоль оси OZ, то согласно выражения (8.1) и (8.10) получаем

$$(v_{\phi})_{\text{бег}} = \frac{c}{\sin \varphi}. \quad (8.11)$$

Выражение (8.11) понимается в качестве скорости элек-

тромагнитной волны вдоль направляющей структуры, где

величина  $c = \frac{\omega}{k}$  представляет из себя величину скорости электромагнитной волны в свободном пространстве (вакууме).

Так как  $\sin \varphi < 1$ , то из выражения (8.11) следует, что

$$(v_{\phi})_{\text{бег}} > c. \quad (8.12)$$

Фазовая скорость электромагнитной волны вдоль направляющей структуры является больше по значению, чем фазовая скорость  $v_{\phi}$  электромагнитной волны в свободном пространстве. Поэтому электромагнитные волны, распространяющиеся в волноводах, получили название быстрых волн, кроме того, такие волны называются еще и поверхностными, так как электромагнитное поле результирующей волны, проникает внутрь металлической поверхности волновода на очень маленькую глубину (глубину скин-слоя).

### **9. Передача электромагнитной энергии на различных частотах.**

На низких частотах в радиоцепях как отмечалось выше используются генераторы электромагнитных колебаний в виде колебательных контуров. В качестве передающей линии между элементами радиотехнических устройств на низких частотах используются обычные соединительные провода.

Рассмотрим вопрос относительно того, что будет происходить с процессом передачи электромагнитной энергии от одного элемента контура к другому при повышении частоты.

В курсе классической электродинамики показывается, что ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитную энергию. Так как в радиотехнической цепи электрический ток, т.е. направленное движение электрических зарядов имеет колебательный характер, то оно будет связано с ускоренным движением, поэтому заключаем, что соединительные провода радиотехнической цепи будут излучать электромагнитную энергию. Кроме того, в курсе электродинамики показывается,

что мощность таких потерь пропорциональна четвертой степени частоты

$$P \sim f^4 \quad (9.1)$$

Выражение (9.1) определяет понятие мощности потерь электромагнитной энергии ускоренно движущимся зарядом.

В любом колебательном контуре, электрический ток представляет из себя ускоренное движение заряженных частиц в виде колебательного процесса, следовательно, переменный ток будет всегда излучать электромагнитную энергию.

Так как электрический ток в колебательном контуре необходимо рассматривать как колебательный процесс, то необходимо проанализировать соотношение (9.1) для различных диапазонов частот:

1. При сравнительно слабых частотах, а именно на промышленной частоте ( $f = 50 \div 60$  Гц) потери на излучение будут сравнительно слабыми. С другой стороны, если проводящий провод окружить металлической трубой, то потери можно свести до минимума. Однако, что касается промышленной передачи электромагнитной энергии, то из-за требований хорошей изоляции на высоких напряжениях и из-за высокого веса таких труб передача электрической энергии осуществляется с помощью обычных открытых проводов.

2. При приближении частоты к значению 1 КГц, мощность потерь возрастает настолько, что необходимо применять защитные экраны. Например, в телефонной связи, используется двойные жилы, помещенные в изолирующий экран.

3. При частотах от 10 МГц до 10 000 МГц для передачи электромагнитной энергии используются коаксиальные линии, а также двухпроводные длинные линии. При больших частотах, длинные линии обладают тем отрицательным свойством, что электромагнитная энергия может локализовываться в таких местах проводящей линии, которые не находятся в активном использовании. Кроме этого, длинные линии на больших частотах имеют ограниченное применение, в силу очень жесткого требования на геометрические размеры.

4. На более высоких частотах (10 - 100 Гц) мощность потерь настолько возрастает, что для передачи электромагнитной энергии наиболее эффективным средством становятся волноводы.

#### 10. Понятие прямоугольного волновода.

Возьмем длинную двухпроводную линию. Будем растягивать провода длинной двухпроводной линии в виде плоских горизонтальных пластин, при этом будем приходить к такому результату, что вектор напряженности электрического поля

$\vec{E}$  будет направлен в пространстве между пластинами нормально к их поверхности, причем с увеличением длины металлической пластины силовые линии электрического поля будут сгущаться к центру пространства между плоскими пластинами. При этом, когда длина пластин составит величину

$\frac{\lambda}{2}$ , то измерения покажут, что потенциалы крайних точек пластин будут одинаковыми. Следовательно, эти крайние точки можно замкнуть вертикальными металлическими пластинами. Получившийся после этого прямоугольный металлический ящик получил название прямоугольного волновода. Все изложенное изображено на рис. 3.10.

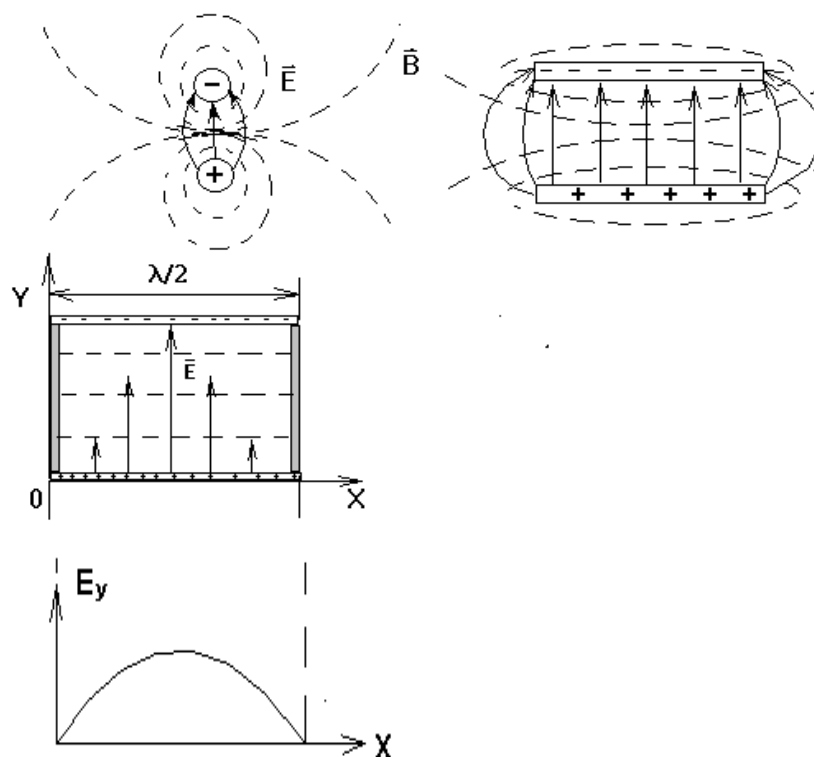


Рис. 3.10

Так как силовые линии магнитного поля не могут проникать сквозь боковые металлические стенки, то следует заключить, что силовые линии магнитного поля будут замыкаться внутри полости волновода. На рис. 3.10 пунктиром показаны проекции силовых линий.

На основании сказанного для векторов напряженности электрического и магнитного полей можно записать следующие выражения через проекции

$$\vec{E} = (0, E_y, 0),$$

$$\vec{H} = (H_x, 0, H_z).$$

На рис. 3.10 мы сформировали волну H-типа, которая в основном и используется для передачи электромагнитной

энергии в прямоугольных волноводах, так как этот тип волны на основной гармонике меньше всего подвержен влиянию различных неоднородностей в виде:

- 1) неровностей поверхностей;
- 2) наличия сочленений;
- 3) неоднородности в диэлектрике и т.д.

### 11. Критическая длина волны.

Рассмотрим понятие критической длины волны относительно параметра определяющего ширину полости прямоугольного волновода. На рис.3.11 эта величина изображена величиной  $a$ .

Для волны Н - типа, вектор  $\vec{E}$  имеет только Y-вую компоненту, которая имеет вид

$$E_y \sim \sin(k x \cos \varphi) = \sin(k_{\perp} x)$$

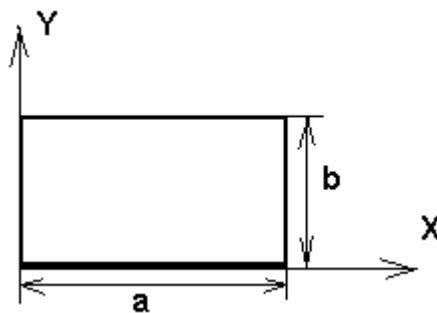


Рис. 3.11

Исходя из предыдущего параграфа заключаем, что на краях оси ОХ электрическое поле обращается в ноль, следовательно, из условия

$$\sin(k_{\perp} x) = 0$$

следует, что

$$k_{\perp} x = k_{\perp} a = \pi \cdot n, \quad (11.1)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  - целые числа.

На основании параграфа 8 можно записать



$$k_{\perp}^2 + k_{||}^2 = k^2, \quad (11.2)$$

где

$$k_{\perp} = \frac{\pi n}{a}, \quad (11.3)$$

$$k_{||} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{бег}}}, \quad (11.4)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (11.5)$$

Подставляем выражения (11.3), (11.4) и (11.5) в выражение (11.2) после чего получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda_{\text{бег}}^2} &= \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}, \\ \frac{4}{\lambda_{\text{бег}}^2} &= \frac{4}{\lambda_0^2} - \frac{n^2}{a^2}, \\ \frac{4}{\lambda_{\text{бег}}^2} &= \frac{4}{\lambda_0^2} \cdot \left(1 - \frac{n^2 \lambda_0^2}{4a^2}\right), \\ \lambda_{\text{бег}}^2 &= \frac{\lambda_0^2}{1 - \frac{n^2 \lambda_0^2}{4a^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно можно записать

$$\lambda_{\text{бег}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda_0^2}{4a^2}}}. \quad (11.6)$$

Выражение (11.6) определяет понятие длины бегущей волны в волноводе.

Проведем анализ выражения (11.6).

$$1. \quad \frac{n^2 \lambda_0^2}{4a^2} < 1.$$

В данном случае величины  $\lambda_{\text{бег}}$  и  $k_{||}$  яв-

ляются действительными величинами. Поэтому экспоненциальный множитель  $e^{jk_{||}z}$  дает условие распространения волны вдоль оси волновода.

$$2. \quad \frac{n^2 \lambda_0^2}{4a^2} > 1. \quad \text{В данном случае величины } \lambda_{\text{бег}} \text{ и } k_{||} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{бег}}} \text{ являются мнимыми величинами. Следовательно,}$$

экспоненциальный сомножитель  $e^{jk_{||}z}$  будет говорить о том, что в волноводе не будет распространяться электромагнитная волна вследствие ее сильного затухания.

$$3. \quad \frac{n^2 \lambda_{\text{крит}}^2}{4a^2} = 1. \quad \text{На основании анализа двух предыдущих случаев заключаем, что данное условие является граничным условием существования процесса распространения электромагнитной волны в волноводе. Откуда для основной гармоники (n = 1) электромагнитной волны получаем значение критической волны}$$

$$\lambda_{\text{крит}} = 2a. \quad (11.7)$$

Критической длиной волны называется длина электромагнитной волны, выше которой, процесс распространения электромагнитной волны в волноводе невозможен.

На величину критической длины волны должен оказывать влияние и другой поперечный размер волновода (b). Этот факт можно учесть с помощью строгого решения системы уравнений Максвелла для прямоугольного волновода.

В случае решения системы уравнений Максвелла только для величины (a), получается следующее выражение для критической длины волны

$$\lambda_{\text{крит}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2}}. \quad (11.8)$$

Пользуясь методом аналогий, для одновременного учета

обоих линейных размеров прямоугольного волновода согласно (11.8) можно записать следующее выражение

$$\lambda_{\text{крит}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}} \quad (11.9)$$

Выражение (11.9) определяет понятие критической длины электромагнитной волны в волноводе в общем случае.

### **Литература**

1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М., Высшая школа, 1992.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М., Высшая школа, 1988.
3. Фальковский О.И. Техническая электродинамика, М., Связь, 1978.
4. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М., Наука, 1980.

### **Содержание**

Введение.....	3
Глава 1. Основные положения электромагнитного поля....	5

1. Понятие электромагнитного поля.....	5
2. Электрическое поле и его основные характеристики...6	
3. Однородные и неоднородные электрические поля.....8	
4. Магнитное поле и его основные характеристики.....10	
5. Однородные и неоднородные магнитные поля.....13	
6. Поток вектора силового поля.....15	
7. Теорема Остроградского-Гаусса.....18	
8. Теорема о потоке вектора напряженности электрического поля.....20	
9. Теорема о потоке вектора напряженности электриче- ского поля в дифференциальной форме.....21	
10. Вектор плотности тока проводимости.....22	
11. Закон сохранения электрического заряда в интеграль- ной форме.....26	
12. Электродинамика неподвижных сред.....28	
13. Закон сохранения электрического заряда в дифферен- циальной форме.....31	
14. Теорема о потоке вектора индукции магнитного поля	
15. Теорема Стокса.....33	
16. Теорема о циркуляции вектора напряженности маг- нитного поля в интегральной форме.....36	
17. Закон электромагнитной индукции.....37	
18. Обобщенный закон электромагнитной индукции.....41	
19. Вектор плотности тока смещения.....44	
20. Поведение диэлектриков в электрическом поле.....48	
21. Объемная плотность поляризационных зарядов....51	
22. Теорема о потоке вектора электрического смещения55	
23. Материальное уравнение для электрического поля...57	
24. Магнитное поле в веществе.....59	
25. Материальное уравнение для магнитного поля.....62	
26. Поляризационные и сторонние токи.....64	
27. Материальные уравнения для нелинейных сред....66	
Глава 2. Система уравнений Максвелла.....71	
1. Система уравнений Максвелла в интегральной форме	
2. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме	
3. Основная задача электродинамики.....74	

4. Метод комплексных амплитуд.....	75
5. Система уравнений Максвелла в комплексной форме.....	8
6. Комплексная диэлектрическая проницаемость. Тангенс угла диэлектрических потерь.....	82
7. Вектор Умова – Пойтинга.....	85
8. Основные характеристики гармонического волнового процесса.....	86
9. Фронт волны. Фазовая скорость волны.....	89
10. Затухание волн. Коэффициент распространения волн.....	
11. Уравнение Гельмгольца.....	94
12. Дифференциальное уравнение для плоской электромагнитной волны.....	97
13. Уравнение плоской электромагнитной волны.....	99
14. Закон изменения вектора напряженности магнитного поля плоской электромагнитной волны.....	101
15. Характеристическое сопротивление.....	105
16. Падение плоской волны на границу раздела двух сред.....	
17. Граничные условия для нормальных составляющих векторов магнитного поля.....	109
18. Граничные условия для нормальных составляющих электромагнитного поля.....	113
19. Граничные условия для касательных составляющих магнитного поля.....	116
20. Граничные условия для касательных составляющих векторов электрического поля.....	119
Глава 3. Распространение электромагнитных волн в направляющих структурах.....	121
1. Поляризация электромагнитной волны.....	121
2. Линейно поляризованные электромагнитные волны.....	122
3. Электромагнитные волны с круговой и эллиптической поляризацией.....	125
4. Падение плоской волны с параллельной поляризацией на металлическую поверхность.....	128
5. Структура результирующего электрического поля при наклонном падении электромагнитной волны с параллельной поляризацией.....	131
6. Структура результирующего магнитного поля при на-	

клонном падении электромагнитной волны с параллельной поляризацией.....	134
7. Волны Е Н типа.....	137
8. Характеристики волн Е и Н типа.....	138
9. Передача электромагнитной энергии на различных частотах.....	141
10. Понятие прямоугольного волновода.....	142
11. Критическая длина волны.....	144
Литература.....	147
Содержание.....	148